ADDITIONS

A L'ANALYSE INDÉTERMINÉE

PAR

JOSEPH LOUIS LAGRANGE

Les Additions à l'analyse indéterminée ont paru pour la première fois dans la traduction de *l'Algèbre* d'EULER faite par JEAN III BERNOULLI et publiée en 2 volumes à Lyon en 1774 sous le titre: *Élémens d'algebre par M. LÉONARD EULER, traduits de l'Allemand, avec des notes et des additions. Tome premier. De l'analyse déterminée. Tome second. De l'analyse indéterminée.* Les Additions de LAGRANGE y occupent les pages 369—664 du second volume. F. R.

TABLE DES MATIERES CONTENUES DANS LES ADDITIONS

AVERTISSEMENT

Les Géometres du siecle passé se sont beaucoup occupés de l'Analyse indéterminée, qu'on appelle vulgairement *Analyse de* DIOPHANTE; mais il n'y a proprement que Messieurs BACHET et FERMAT qui aient ajouté quelque chose à ce que DIOPHANTE lui-même nous a laissé sur cette matiere.

On doit sur-tout au premier une Méthode complette pour résoudre en nombres entiers tous les problemes indéterminés du premier degré;*) le second est l'Auteur de quelques Méthodes pour la résolution des équations indéterminées qui passent le second degré;**) de la Méthode singuliere, par laquelle on démontre qu'il est impossible que la somme ou la différence de deux carrés-carrés, puisse jamais être un carré;†) de la solution d'un grand nombre de problemes très-difficiles et de plusieurs beaux théoremes sur les nombres entiers, qu'il a laissés sans démonstration, mais dont la plupart ont été ensuite démontrés par Mr. EULER dans les Commentaires de Pétersbourg.††)

---

*) Voyez plus bas le paragraphe III. Au reste, je ne parle point ici de son *Commentaire sur* DIOPHANTE, parce que cet Ouvrage, excellent dans son genre, ne renferme à proprement parler aucune découverte.

**) Ce sont celles qui sont exposées dans les chapitres 8, 9 et 10 du Traité précédent. Le P. BILLI les a recueillies dans différens écrits de M. FERMAT, et les a publiées à la tête de la nouvelle édition de DIOPHANTE, donnée par M. FERMAT le fils.

†) Cette méthode est détaillée dans le chapit. 13 du Traité précédent; on en trouve les principes dans la *Remarque* de M. FERMAT, qui est après la Question XXVI du Livre VI de DIOPHANTE.

††) Les problemes et les théoremes dont nous parlons, sont répandus dans les *Remarques* de M. FERMAT sur les Questions de DIOPHANTE, et dans ses Lettres imprimées dans les *Opera Mathematica, etc.* et dans le second volume des *Œuvres de* WALLIS.

On trouvera aussi dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour les années 1770 et suiv. les démonstrations de quelques théoremes de cet Auteur, qui n'avoient pas encore été démontrés.

Cette branche de l'Analyse a été presque abandonnée dans ce siecle; et si on en excepte Mr. EULER, je ne connois personne qui s'y soit appliqué; mais les belles et nombreuses découvertes que ce grand Géometre y a faites, nous ont bien dédommagé de l'espece d'indifférence que les autres Géometres paroissent avoir eue jusqu'ici pour ces sortes de recherches. Les Commentaires de Pétersbourg sont pleins des travaux de Mr. EULER dans ce genre, et l'Ouvrage qu'il vient de donner est un nouveau service qu'il rend aux Amateurs de l'Analyse de DIOPHANTE. On n'avoit point encore d'Ouvrage où cette science fût traitée d'une maniere méthodique, et qui renfermât et expliquât clairement les principales regles connues jusqu'ici pour la solution des problemes indéterminés. Le Traité précédent réunit ce double avantage; mais pour le rendre encore plus complet, j'ai cru devoir y faire plusieurs additions dont je vais rendre compte en peu de mots.

La théorie des fractions continues est une des plus utiles de l'Arithmétique, où elle sert à résoudre avec facilité des problemes qui, sans son secours, seroient presqu'intraitables; mais elle est d'un plus grand usage encore dans la solution des problemes indéterminés, lorsqu'on ne demande que des nombres entiers. Cette raison m'a engagé à exposer cette théorie avec toute l'étendue nécessaire pour la faire bien entendre; comme elle manque dans les principaux Ouvrages d'Arithmétique et d'Algebre, elle doit être peu connue des Géometres; je serai satisfait, si je puis contribuer à la leur rendre un peu plus familiere. A la suite de cette théorie qui occupe le § I, viennent différens problemes curieux et entiérement nouveaux, qui dépendent à la vérité de la même théorie, mais que j'ai cru devoir traiter d'une maniere directe, pour en rendre la solution plus intéressante; on y remarquera principalement une méthode très-simple et très-facile pour réduire en fractions continues les racines des équations du second degré, et une démonstration rigoureuse que ces fractions doivent toujours être nécessairement périodiques.

Les autres Additions concernent sur-tout la résolution des équations indéterminées du premier et du second degré; je donne pour celles-ci des méthodes générales et nouvelles, tant pour le cas où l'on ne demande que des nombres rationnels, que pour celui où l'on exige que les nombres cherchés soient entiers; et je traite d'ailleurs quelques autres matieres importantes et relatives au même objet.

Enfin le dernier paragraphe renferme des recherches sur les fonctions qui ont la propriété, que le produit de deux ou de plusieurs fonctions semblables, est aussi une fonction semblable; j'y donne une méthode générale pour trouver ces sortes de fonctions, et j'en fais voir l'usage pour la résolution de différens problemes indéterminés, sur lesquels les méthodes connues n'auroient aucune prise.

Tels sont les principaux objets de ces Additions, auxquelles j'aurois pu donner beaucoup plus d'étendue, si je n'avois craint de passer de justes bornes; je souhaite que les matieres que j'y ai traitées puissent mériter l'attention des Géometres, et réveiller leur goût pour une partie de l'Analyse, qui me paroît très-digne d'exercer leur sagacité.

PARAGRAPHE I

SUR LES FRACTIONS CONTINUES

1. Comme la théorie des Fractions continues manque dans les livres ordinaires d'Arithmétique et d'Algebre, et que par cette raison elle doit être peu connue des Géometres, nous croyons devoir commencer ces Additions par une exposition abrégée de cette théorie, dont nous aurons souvent lieu de faire l'application dans la suite.

On appelle en général *fraction continue* toute expression de cette forme,

$$\alpha + \cfrac{b}{\beta + \cfrac{c}{\gamma + \cfrac{d}{\delta + \text{, etc.}}}}$$

où les quantités α, β, γ, δ, etc. et b, c, d, etc. sont des nombres entiers positifs ou négatifs; mais nous ne considérerons ici que les fractions continues, où les numérateurs b, c, d, etc. sont égaux à l'unité, c'est-à-dire celles qui sont de la forme

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \text{, etc.}}}}$$

α, β, γ, etc. étant d'ailleurs des nombres quelconques entiers positifs ou négatifs; car celles-ci sont, à proprement parler, les seules qui soient d'un grand usage dans l'Analyse, les autres n'étant presque que de pure curiosité.

2. Milord Brouncker est, je crois, le premier qui ait imaginé les fractions continues; on connoît celle qu'il a trouvée pour exprimer le rapport du carré circonscrit à l'aire du cercle, et qui est

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \text{, etc.}}}}$$

Mais on ignore le chemin qui l'y a conduit. On trouve seulement dans l'*Arithmetica infinitorum* quelques recherches sur ce sujet, dans lesquelles WALLIS démontre d'une maniere assez indirecte, quoique fort ingénieuse, l'identité de l'expression de BROUNCKER avec la sienne, qui est, comme l'on sait, $\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots}$; il y donne aussi la méthode de réduire en général toutes sortes de fractions continues à des fractions ordinaires. Au reste, il ne paroît pas que l'un ou l'autre de ces deux grands Géometres ait connu les principales propriétés et les avantages singuliers des fractions continues; nous verrons ci-après que la découverte en est principalement due à HUYGHENS.

3. Les fractions continues se présentent naturellement toutes les fois qu'il s'agit d'exprimer en nombres des quantités fractionnaires ou irrationnelles. En effet, supposons qu'on ait à évaluer une quantité quelconque donnée a, qui ne soit pas exprimable par un nombre entier; la voie la plus simple est de commencer par chercher le nombre entier qui sera le plus proche de la valeur de a, et qui n'en différera que par une fraction moindre que l'unité. Soit ce nombre α, et l'on aura $a-\alpha$ égal à une fraction plus petite que l'unité; de sorte que $\frac{1}{a-\alpha}$ sera au contraire un nombre plus grand que l'unité; soit donc $\frac{1}{a-\alpha}=b$, et comme b doit être un nombre plus grand que l'unité, on pourra chercher de même le nombre entier qui approchera le plus de la valeur de b; et ce nombre étant nommé β, on aura de nouveau $b-\beta$ égal à une fraction plus petite que l'unité, et par conséquent $\frac{1}{b-\beta}$ sera égal à une quantité plus grande que l'unité, qu'on pourra désigner par c; ainsi, pour évaluer c, il n'y aura qu'à chercher pareillement le nombre entier le plus proche de c, lequel étant désigné par γ, on aura $c-\gamma$ égal à une quantité plus petite que l'unité, et par conséquent $\frac{1}{c-\gamma}$ sera égal à une quantité d plus grande que l'unité, et ainsi de suite. Par ce moyen il est clair qu'on doit épuiser peu à peu la valeur de a, et cela de la maniere la plus simple et la plus prompte qu'il est possible, puisqu'on n'emploie que des nombres entiers dont chacun approche, autant qu'il est possible, de la valeur cherchée.

Maintenant, puisque $\frac{1}{a-\alpha}=b$, on aura $a-\alpha=\frac{1}{b}$, et $a=\alpha+\frac{1}{b}$; de même, à cause de $\frac{1}{b-\beta}=c$, on aura $b=\beta+\frac{1}{c}$; et, à cause de $\frac{1}{c-\gamma}=d$, on aura pareillement $c=\gamma+\frac{1}{d}$, et ainsi de suite; de sorte qu'en substituant successivement ces valeurs, on aura

$$a = \alpha + \frac{1}{b},$$

$$= \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{c}},$$

$$= \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{d}}},$$

et en général

$$a = \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta +, \text{ etc.}}}}$$

Il est bon de remarquer ici que les nombres α, β, γ, etc. qui représentent, comme nous venons de le voir, les valeurs entieres approchées des quantités a, b, c, etc. peuvent être pris chacun de deux manieres différentes, puisqu'on peut prendre également, pour la valeur entiere approchée d'une quantité donnée, l'un ou l'autre des deux nombres entiers, entre lesquels se trouve cette quantité; il y a cependant une différence essentielle entre ces deux manieres de prendre les valeurs approchées par rapport à la fraction continue qui en résulte; car si on prend toujours les valeurs approchées plus petites que les véritables, les dénominateurs β, γ, δ, etc. seront tous positifs; au lieu qu'ils seront tous négatifs, si on prend les valeurs approchées toutes plus grandes que les véritables, et ils seront en partie positifs et en partie négatifs, si les valeurs approchées sont prises tantôt trop petites et tantôt trop grandes.

En effet, si α est plus petit que a, $a - \alpha$ sera une quantité positive; donc b sera positif, et β le sera aussi; au contraire $a - \alpha$ sera négatif, si α est plus grand que a; donc b sera négatif, et β le sera aussi. De même si β est plus petit que b, $b - \beta$ sera toujours une quantité positive; donc c le sera aussi, et par conséquent aussi γ; mais si β est plus grand que b, $b - \beta$ sera une quantité négative; de sorte que c, et par conséquent aussi γ, seront négatifs, et ainsi de suite.

Au reste, lorsqu'il s'agit de quantités négatives, j'entends par quantités plus petites celles qui, prises positivement, seroient plus grandes; nous aurons cependant quelquefois dans la suite occasion de comparer entr'elles des quantités purement par rapport à leur grandeur absolue; mais nous aurons soin d'avertir alors qu'il faudra faire abstraction des signes.

Je dois remarquer encore que si, parmi les quantités b, c, d, etc., il s'en trouve une qui soit égale à un nombre entier, alors la fraction continue sera terminée, parce qu'on pourra y conserver cette quantité même; par exemple, si c est un nombre entier, la fraction continue qui donne la valeur de a, sera

$$a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{c.}}$$

En effet, il est clair qu'il faudroit prendre $\gamma = c$, ce qui donneroit $d = \frac{1}{c-\gamma} = \frac{1}{0} = \infty$, et par conséquent $\delta = \infty$; de sorte que l'on auroit

$$a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\infty},}}$$

les termes suivans évanouissant vis-à-vis de la quantité infinie ∞; or $\frac{1}{\infty} = 0$; donc on aura simplement

$$a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{c.}}$$

Ce cas arrivera toutes les fois que la quantité a sera commensurable, c'est-à-dire qu'elle sera exprimée par une fraction rationnelle; mais lorsque a sera une quantité irrationnelle ou transcendante, alors la fraction continue ira nécessairement à l'infini.

4. Supposons que la quantité a soit une fraction ordinaire $\frac{A}{B}$, A et B étant des nombres entiers donnés; il est d'abord évident que le nombre entier α qui approchera le plus de $\frac{A}{B}$, sera le quotient de la division de A par B; ainsi supposant la division faite à la maniere ordinaire, et nommant α le quotient et C le reste, on aura $\frac{A}{B} - \alpha = \frac{C}{B}$; donc $b = \frac{B}{C}$; pour avoir de même la valeur entiere approchée β de la fraction $\frac{B}{C}$, il n'y aura qu'à diviser B par C, et prendre pour β le quotient de cette division; alors nommant D le reste, on aura $b - \beta = \frac{D}{C}$, et par conséquent $c = \frac{C}{D}$; on continuera donc à diviser C par D, et le quotient sera la valeur du nombre γ, et ainsi de suite; d'où résulte cette regle fort simple pour réduire les fractions ordinaires en fractions continues.

Divisez d'abord le numérateur de la fraction proposée par son dénominateur, et nommez le quotient α; divisez ensuite le dénominateur par le reste, et nommez le quotient β; divisez après cela le premier reste par le second reste, et soit le *quotient* γ; *continuez ainsi en divisant toujours l'avant-dernier reste par le dernier, jusqu'à ce qu'on parvienne à une division qui se fasse sans reste, ce qui doit nécessairement arriver, puisque les restes sont tous des nombres entiers qui vont en diminuant; vous aurez la fraction continue*

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \text{, etc.}}}}$$

qui sera égale à la fraction donnée.

5. Soit proposé de réduire en fraction continue la fraction $\frac{1103}{887}$; on divisera donc 1103 par 887, on aura le quotient 1 et le reste 216; on divisera 887 par 216, on aura le quotient 4 et le reste 23; on divisera 216 par 23, ce qui donnera le quotient 9 et le reste 9; on divisera encore 23 par 9, on aura le quotient 2 et le reste 5; on divisera 9 par 5, on aura le quotient 1 et le reste 4; on divisera 5 par 4, on aura le quotient 1 et le reste 1; enfin, divisant 4 par 1, on aura le quotient 4 et le reste nul, de sorte que l'opération sera terminée. Rassemblant donc par ordre tous les quotiens trouvés, on aura cette série 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4, d'où l'on formera la fraction continue

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}}.$$

6. Comme dans la maniere ordinaire de faire les divisions, on prend toujours pour quotient le nombre entier qui est égal ou moindre que la fraction proposée, il s'ensuit que par la méthode précédente on n'aura que des fractions continues, dont tous les dénominateurs seront des nombres positifs.

Or on peut aussi prendre pour quotient le nombre entier, qui est immédiatement plus grand que la valeur de la fraction, lorsque cette fraction n'est pas réductible à un nombre entier, et pour cela il n'y a qu'à augmenter d'une unité la valeur du quotient trouvé à la maniere ordinaire; alors le reste sera négatif, et le quotient suivant sera nécessairement négatif. Ainsi on pourra à volonté rendre les termes de la fraction continue positifs ou négatifs.

Dans l'exemple précédent, au lieu de prendre 1 pour le quotient de 1103 divisé par 887, je puis prendre 2; mais j'aurai le reste négatif -671, par lequel il faudra maintenant diviser 887; on divisera donc 887 par -671, et l'on aura ou le quotient -1 et le reste 216, ou le quotient -2 et le reste -455. Prenons le quotient plus grand -1, et alors il faudra diviser le reste -671 par le reste 216, d'où l'on aura ou le quotient -3 et le reste -23, ou le quotient -4 et le reste 193. Je continue la division en adoptant le quotient plus grand -3; j'aurai à diviser le reste 216 par le reste -23, ce qui me donnera ou le quotient -9 et le reste 9, ou le quotient -10 et le reste -14, et ainsi de suite.

De cette maniere on aura

$$\frac{1103}{887}=2+\cfrac{1}{-1+\cfrac{1}{-3+\cfrac{1}{-9+,\text{ etc.}}}}$$

où l'on voit que tous les dénominateurs sont négatifs.

7. On peut au reste rendre positif chaque dénominateur négatif, en changeant le signe du numérateur; mais il faut alors changer aussi le signe du numérateur suivant; car il est clair qu'on a

$$\mu+\cfrac{1}{-\nu+\cfrac{1}{\pi+,\text{ etc.}}}=\mu-\cfrac{1}{\nu-\cfrac{1}{\pi+,\text{ etc.}}}$$

Ensuite on pourra, si l'on veut, faire disparoître tous les signes — de la fraction continue, et la réduire à une autre, où tous les termes soient positifs; car on a en général

$$\mu-\cfrac{1}{\nu+,\text{ etc.}}=\mu-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\nu-1+,\text{ etc.}}}$$

comme on peut s'en convaincre aisément, en réduisant ces deux quantités en fractions ordinaires.

On pourroit aussi par un moyen semblable introduire des termes négatifs à la place des positifs, car on a

$$\mu+\cfrac{1}{\nu+,\text{ etc.}}=\mu+1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\nu-1+,\text{ etc.}}}$$

D'où l'on voit que par ces sortes de transformations on peut quelquefois simplifier une fraction continue, et la réduire à un moindre nombre de termes; ce qui aura lieu toutes les fois qu'il y aura des dénominateurs égaux à l'unité positive ou négative.

En général il est clair que pour avoir la fraction continue la plus convergente qu'il est possible vers la valeur de la quantité donnée, il faut toujours prendre pour α, β, γ, etc. les nombres entiers qui approchent le plus des quantités a, b, c, etc. soit qu'ils soient plus petits ou plus grands que ces quantités; or il est facile de voir que si, par exemple, on ne prend pas pour α le nombre entier qui approche le plus, soit en excès ou en défaut, de a, le nombre suivant β sera nécessairement égal à l'unité; en effet la différence entre a et α sera alors plus grande que $\frac{1}{2}$, par conséquent on aura $b = \frac{1}{a-\alpha}$ plus petit que 2; donc β ne pourra être qu'égal à l'unité.

Ainsi toutes les fois que dans une fraction continue on trouvera des dénominateurs égaux à l'unité, ce sera une marque que l'on n'a pas pris les dénominateurs précédens aussi approchans qu'il est possible, et que par conséquent la fraction peut se simplifier en augmentant ou en diminuant ces dénominateurs d'une unité, ce qu'on pourra exécuter par les formules précédentes, sans être obligé de refaire en entier le calcul.

8. La méthode de l'art. 4 peut servir aussi à réduire en fraction continue toute quantité irrationnelle ou transcendante, pourvu qu'elle soit auparavant exprimée en décimales; mais comme la valeur en décimales ne peut être qu'approchée, et qu'en augmentant d'une unité le dernier caractere on a deux limites, entre lesquelles doit se trouver la vraie valeur de la quantité proposée, il faudra, pour ne pas sortir de ces limites, faire à la fois le même calcul sur les deux fractions dont il s'agit, et n'admettre ensuite dans la fraction continue que les quotiens qui résulteront également des deux opérations.

Soit, par exemple, proposé d'exprimer par une fraction continue le rapport de la circonférence du cercle au diametre.

Ce rapport exprimé en décimales est, par le calcul de Viete, 3,1415926535....; de sorte qu'on aura la fraction $\frac{31415926535}{10000000000}$ à réduire en fraction continue par la méthode ci-dessus; or, si on ne prend que la fraction $\frac{314159}{100000}$, on trouve les quotiens 3, 7, 15, 1, etc., et si on prenoit la fraction plus grande $\frac{314160}{100000}$, on trouveroit les quotiens 3, 7, 16, etc. de sorte que le troisieme quotient demeureroit incertain; d'où l'on voit que, pour pouvoir pousser seulement la fraction continue au-delà de trois termes, il faudra nécessairement adopter une valeur de la périphérie qui ait plus de six caracteres.

Or, si on prend la valeur donnée par LUDOLPH en trente-cinq caracteres, et qui est 3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288; et qu'on opere en même temps sur cette fraction et sur la même, en y augmentant le dernier caractere 8 d'une unité, on trouvera cette suite de quotiens, 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1; de sorte que l'on aura

$$\frac{\textit{Periph.}}{\textit{diamétr.}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 +, \text{ etc.}}}}}}}$$

Comme il y a ici des dénominateurs égaux à l'unité, on pourra simplifier la fraction, en y introduisant des termes négatifs, par les formules de l'art. 7, et l'on trouvera

$$\frac{\textit{Périph.}}{\textit{diamétr.}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 - \cfrac{1}{294 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 +, \text{ etc.}}}}}}$$

ou bien

$$\frac{\textit{Périph.}}{\textit{diamétr.}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{-294 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{-3 +, \text{ etc.}}}}}}$$

9. Nous avons montré ailleurs comment on peut appliquer la théorie des fractions continues à la résolution numérique des équations, pour laquelle on n'avoit encore que des méthodes imparfaites et insuffisantes. (Voyez les Mémoires de l'Académie de Berlin pour les années 1767 et 1768.[1]) Toute la difficulté consiste à pouvoir trouver dans une équation quelconque la valeur entiere la plus approchée, soit en excès ou en défaut, de la racine cherchée, et c'est sur quoi nous avons donné les premiers des regles sûres et géné-

1) *Oeuvres de* LAGRANGE, publiées par les soins de M. I.-A. SERRET, t. II, p. 538 et 581. H. W.

rales, par lesquelles on peut non-seulement reconnoître combien de racines réelles positives ou négatives, égales ou inégales, contient la proposée, mais encore trouver facilement les limites de chacune de ces racines, et même les limites des quantités réelles qui composent les racines imaginaires. Supposant donc que x soit l'inconnue de l'équation proposée, on cherchera d'abord le nombre entier qui approchera le plus de la racine cherchée, et nommant ce nombre α, il n'y aura qu'à faire, comme on l'a vu dans l'art. 3, $x = \alpha + \frac{1}{y}$, (je nomme ici x, y, z, etc. ce que j'ai dénoté dans l'art. cité par a, b, c, etc.); et substituant cette valeur à la place de x, on aura, après avoir fait évanouir les fractions, une équation du même degré en y, qui devra avoir au moins une racine positive ou négative plus grande que l'unité. On cherchera donc de nouveau la valeur entiere approchée de cette racine, et nommant cette valeur β, on fera ensuite $y = \beta + \frac{1}{z}$, ce qui donnera de même une équation en z, qui aura aussi nécessairement une racine plus grande que l'unité, et dont on cherchera pareillement la valeur entiere approchée γ, et ainsi de suite. De cette maniere la racine cherchée se trouvera exprimée par la fraction continue

$$\alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} +, \text{ etc.}$$

qui sera terminée si la racine est commensurable, mais qui ira nécessairement à l'infini, si elle est incommensurable.

On trouvera dans les Mémoires cités tous les principes et les détails nécessaires pour se mettre au fait de cette méthode et de ses usages, et même différens moyens pour abréger souvent les opérations qu'elle demande; nous croyons n'y avoir presque rien laissé à désirer sur ce sujet si important.

Au reste, pour ce qui regarde les racines des équations du second degré, nous donnerons plus bas, (art. 33 et suiv.), une méthode particuliere et très-simple pour les convertir en fractions continues.

10. Après avoir expliqué la génération des fractions continues, nous allons en montrer les usages et les principales propriétés.

Il est d'abord évident que plus on prend de termes dans une fraction continue, plus on doit approcher de la vraie valeur de la quantité qu'on a exprimée par cette fraction; de sorte que si on s'arrête successivement à chaque terme de la fraction, on aura une suite de quantités qui seront nécessairement convergentes vers la quantité proposée.

Ainsi ayant réduit la valeur de a à la fraction continue

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta +, \text{ etc.}}}}$$

on aura les quantités

$$\alpha, \quad \alpha + \frac{1}{\beta}, \quad \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}}, \quad \text{etc.}$$

ou bien, en réduisant,

$$\alpha, \quad \frac{\alpha\beta + 1}{\beta}, \quad \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma}{\beta\gamma + 1}, \quad \text{etc.}$$

qui approcheront de plus en plus de la valeur de a.

Pour pouvoir mieux juger de la loi et de la convergence de ces quantités, nous remarquerons que par les formules de l'article 3 on a

$$a = \alpha + \frac{1}{b}, \quad b = \beta + \frac{1}{c}, \quad c = \gamma + \frac{1}{d}, \quad \text{etc.}$$

d'où l'on voit d'abord que α est la premiere valeur approchée de a; qu'ensuite si on prend la valeur exacte de a, qui est $\frac{\alpha b + 1}{b}$, et qu'on y substitue pour b sa valeur approchée β, on aura cette valeur plus approchée $\frac{\alpha\beta + 1}{\beta}$; qu'on aura de même une troisieme valeur plus approchée de a, en mettant d'abord pour b sa valeur exacte $\frac{\beta c + 1}{c}$, ce qui donne $a = \frac{(\alpha\beta + 1)c + \alpha}{\beta c + 1}$, et prenant ensuite pour c la valeur approchée γ; par ce moyen la nouvelle valeur approchée de a sera

$$\frac{(\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha}{\beta\gamma + 1};$$

continuant le même raisonnement, on pourra approcher davantage, en mettant, dans l'expression de a trouvée ci-dessus, à la place de c sa valeur exacte $\frac{\gamma d + 1}{d}$, ce qui donnera

$$a = \frac{((\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha)d + \alpha\beta + 1}{(\beta\gamma + 1)d + \beta},$$

et prenant ensuite pour d sa valeur approchée δ; de sorte qu'on aura pour la quatrieme approximation la quantité

$$\frac{((\alpha\beta+1)\gamma+\alpha)\delta+\alpha\beta+1}{(\beta\gamma+1)\delta+\beta},$$

et ainsi de suite.

De-là il est facile de voir que si par le moyen des nombres α, β, γ, δ, etc. on forme les expressions suivantes,

$$\begin{array}{ll}
A=\alpha & A^1=1 \\
B=\beta A+1 & B^1=\beta \\
C=\gamma B+A & C^1=\gamma B^1+A^1 \\
D=\delta C+B & D^1=\delta C^1+B^1 \\
E=\varepsilon D+C & E^1=\varepsilon D^1+C^1 \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

on aura cette suite de fractions convergentes vers la quantité a,

$$\frac{A}{A^1},\ \frac{B}{B^1},\ \frac{C}{C^1},\ \frac{D}{D^1},\ \frac{E}{E^1},\ \frac{F}{F^1},\ \text{etc.}$$

Si la quantité a est rationnelle, et représentée par une fraction quelconque $\frac{V}{V^1}$, il est évident que cette fraction sera toujours la derniere dans la série précédente; puisque dans ce cas la fraction continue sera terminée, et que la derniere fraction de la série ci-dessus doit toujours équivaloir à toute la fraction continue.

Mais si la quantité a est irrationnelle ou transcendante, alors la fraction continue allant nécessairement à l'infini, on pourra aussi pousser à l'infini la série des fractions convergentes.

11. Examinons maintenant la nature de ces fractions; et d'abord il est visible que les nombres A, B, C, etc. doivent aller en augmentant, aussi bien que les nombres A^1, B^1, C^1, etc. car:

1°. Si les nombres α, β, γ, etc. sont tous positifs, les nombres A, B, C, etc. et A^1, B^1, C^1, etc. seront aussi tous positifs, et l'on aura évidemment $B>A$, $C>B$, $D>C$, etc. et $B^1=$ ou $>A^1$, $C^1>B^1$, $D^1>C^1$, etc.

2°. Si les nombres α, β, γ, etc. sont tous ou en partie négatifs, alors parmi les nombres A, B, C, etc. et A^1, B^1, C^1, etc. il y en aura de positifs et de négatifs; mais dans ce cas on considérera que l'on a en général par les formules précédentes

$$\frac{B}{A}=\beta+\frac{1}{\alpha},\quad \frac{C}{B}=\gamma+\frac{A}{B},\quad \frac{D}{C}=\delta+\frac{B}{C},\ \text{etc.}$$

d'où l'on voit d'abord que si les nombres α, β, γ, etc. sont différens de l'unité, quels que soient d'ailleurs leurs signes, on aura nécessairement, en faisant abstraction des signes, $\frac{B}{A}$ plus grand que l'unité; donc $\frac{A}{B}$ moindre que l'unité, par conséquent $\frac{C}{B}$ plus grand que l'unité, et ainsi de suite; donc B plus grand que A, C plus grand que B, etc.

Il n'y aura d'exception que lorsque parmi les nombres α, β, γ, etc. il s'en trouvera d'égaux à l'unité; supposons, par exemple, que le nombre γ soit le premier qui soit égal à ± 1; on aura d'abord B plus grand que A, mais C sera moindre que B, s'il arrive que la fraction $\frac{A}{B}$ soit de signe différent de γ; ce qui est clair par l'équation $\frac{C}{B}=\gamma+\frac{A}{B}$; parce que dans ce cas $\gamma+\frac{A}{B}$ sera un nombre moindre que l'unité; or je dis qu'alors on aura nécessairement D plus grand que B; car puisque $\gamma=\pm 1$, on aura, (art. 10), $c=\pm 1+\frac{1}{d}$, et $c-\frac{1}{d}=\pm 1$; or, comme c et d sont des quantités plus grandes que l'unité, (art. 3), il est clair que cette équation ne pourra subsister, à moins que c et d ne soient de même signe; donc, puisque γ et δ sont les valeurs entieres approchées de c et d, ces nombres γ et δ devront être aussi de même signe; mais la fraction $\frac{C}{B}=\gamma+\frac{A}{B}$ doit être de même signe que γ, à cause que γ est un nombre entier, et $\frac{A}{B}$ une fraction moindre que l'unité; donc $\frac{C}{B}$ et δ seront des quantités de même signe; par conséquent $\frac{\delta C}{B}$ sera une quantité positive. Or on a $\frac{D}{C}=\delta+\frac{B}{C}$; donc multipliant par $\frac{C}{B}$, on aura $\frac{D}{B}=\delta\frac{C}{B}+1$; donc $\frac{\delta C}{B}$ étant une quantité positive, il est clair que $\frac{D}{B}$ sera plus grand que l'unité; donc D plus grand que B.

De-là on voit que s'il arrive que dans la série A, B, C, etc. il se trouve un terme qui soit moindre que le précédent, le terme suivant sera nécessairement plus grand; de sorte qu'en mettant à part ces termes plus petits, la série ne laissera pas d'aller en augmentant.

Au reste on pourra toujours éviter, si l'on veut, cet inconvénient, soit en prenant les nombres α, β, γ, etc. tous positifs, soit en les prenant tous différens de l'unité, ce qui est toujours possible.

On fera les mêmes raisonnemens par rapport à la série A^1, B^1, C^1, etc. dans laquelle on a pareillement

$$\frac{B^1}{A^1}=\beta,\quad \frac{C^1}{B^1}=\gamma+\frac{A^1}{B^1},\quad \frac{D^1}{C^1}=\delta+\frac{B^1}{C^1},\quad \text{etc.}$$

d'où l'on déduira des conclusions semblables aux précédentes.

12. Maintenant, si on multiplie en croix les termes des fractions voisines dans la série $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. on trouvera

$$BA^1-AB^1=1,\quad CB^1-BC^1=AB^1-BA^1,\quad DC^1-CD^1=BC^1-CB^1,\quad \text{etc.}$$

d'où je conclus qu'on aura en général

$$\begin{aligned} BA^1-AB^1&=1\\ CB^1-BC^1&=-1\\ DC^1-CD^1&=1\\ ED^1-DE^1&=-1,\quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Cette propriété est très-remarquable, et donne lieu à plusieurs conséquences importantes.

D'abord on voit que les fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. doivent être déjà réduites à leurs moindres termes; car si, par exemple, C et C^1 avoient un commun diviseur autre que l'unité, le nombre entier CB^1-BC^1 seroit aussi divisible par ce même diviseur, ce qui ne se peut, à cause de $CB^1-BC^1=-1$.

Ensuite si on met les équations précédentes sous cette forme

$$\begin{aligned} \frac{B}{B^1}-\frac{A}{A^1}&=\frac{1}{A^1B^1}\\ \frac{C}{C^1}-\frac{B}{B^1}&=-\frac{1}{B^1C^1}\\ \frac{D}{D^1}-\frac{C}{C^1}&=\frac{1}{C^1D^1}\\ \frac{E}{E^1}-\frac{D}{D^1}&=-\frac{1}{D^1E^1},\quad \text{etc.}\end{aligned}$$

il est aisé de voir que les différences entre les fractions voisines de la série $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. vont continuellement en diminuant, de sorte que cette série est nécessairement convergente.

Or je dis que la différence entre deux fractions consécutives est aussi petite qu'il est possible; en sorte qu'entre ces mêmes fractions il ne sauroit tomber aucune autre fraction quelconque, à moins qu'elle n'ait un dénominateur plus grand que ceux de ces fractions-là.

Car prenons, par exemple, les deux fractions $\frac{C}{C^1}$ et $\frac{D}{D^1}$, dont la différence est $\frac{1}{C^1 D^1}$, et supposons, s'il est possible, qu'il existe une autre fraction $\frac{m}{n}$, dont la valeur tombe entre celles de ces deux fractions, et dans laquelle le dénominateur n soit moindre que C^1 ou que D^1; donc puisque $\frac{m}{n}$ doit se trouver entre $\frac{C}{C^1}$ et $\frac{D}{D^1}$, il faudra que la différence entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{C}{C^1}$, qui est $\frac{mC^1 - nC}{nC^1}$ ou $\frac{nC - mC^1}{nC^1}$, soit plus petite que $\frac{1}{C^1 D^1}$, différence entre $\frac{D}{D^1}$ et $\frac{C}{C^1}$; mais il est clair que celle-là ne sauroit être moindre que $\frac{1}{nC^1}$; donc, si $n < D^1$, elle sera nécessairement plus grande que $\frac{1}{C^1 D^1}$; de même la différence entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{D}{D^1}$ ne pouvant être plus petite que $\frac{1}{nD^1}$, sera nécessairement plus grande que $\frac{1}{C^1 D^1}$, si $n < C^1$, au lieu qu'elle devroit en être plus petite.

13. Voyons présentement de combien chaque fraction de la série $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, etc. approchera de la valeur de la quantité a. Pour cela on remarquera que les formules trouvées dans l'art. 10 donnent

$$a = \frac{Ab + 1}{A^1 b}$$

$$a = \frac{Bc + A}{B^1 c + A^1}$$

$$a = \frac{Cd + B}{C^1 d + B^1}$$

$$a = \frac{De + C}{D^1 e + C^1}$$

et ainsi de suite.

Donc si on veut savoir de combien la fraction $\frac{C}{C^1}$, par exemple, approche de la quantité, on cherchera la différence entre $\frac{C}{C^1}$ et a; en prenant pour a la quantité $\frac{Cd + B}{C^1 d + B^1}$, on aura

$$a - \frac{C}{C^1} = \frac{Cd + B}{C^1 d + B^1} - \frac{C}{C^1} = \frac{BC^1 - CB^1}{C^1(C^1 d + B^1)} = \frac{1}{C^1(C^1 d + B^1)},$$

à cause de $BC^1 - CB^1 = 1$, (art. 12); or, comme on suppose que δ soit la valeur approchée de d, en sorte que la différence entre d et δ soit moindre que l'unité, (art. 3), il est clair que la valeur de d sera renfermée entre les deux nombres δ et $\delta \pm 1$, (le signe supérieur étant pour le cas où la valeur approchée δ est moindre que la véritable d, et le signe inférieur pour le cas où δ est plus grand que d), et que par conséquent la valeur de $C^1 d + B^1$, sera aussi renfermée entre ces deux-ci, $C^1\delta + B^1$ et $C^1(\delta \pm 1) + B^1$, c'est-à-dire entre D^1 et $D^1 \pm C^1$; donc la différence $a - \frac{C}{C^1}$ sera renfermée entre ces deux limites $\frac{1}{C^1 D^1}$, $\frac{1}{C^1(D^1 \pm C^1)}$; d'où l'on pourra juger de la quantité de l'approximation de la fraction $\frac{C}{C^1}$.

14. En général on aura

$$a = \frac{A}{A^1} + \frac{1}{A^1 b}$$

$$a = \frac{B}{B^1} - \frac{1}{B^1(B^1 c + A^1)}$$

$$a = \frac{C}{C^1} + \frac{1}{C^1(C^1 d + B^1)}$$

$$a = \frac{D}{D^1} - \frac{1}{D^1(D^1 e + C^1)}$$

et ainsi de suite.

Or, si on suppose que les valeurs approchées α, β, γ, etc. soient toujours prises moindres que les véritables, ces nombres seront tous positifs, aussi bien que les quantités b, c, d, etc. (art. 3); donc les nombres A^1, B^1, C^1, etc. seront aussi tous positifs; d'où il s'ensuit que les différences entre la quantité a et les fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. seront alternativement positives et négatives; c'est-à-dire que ces fractions seront alternativement plus petites et plus grandes que la quantité a.

De plus, comme $b > \beta$, $c > \gamma$, $d > \delta$, etc. (*hyp.*) on aura

$$b > B^1,\quad B^1 c + A^1 > B^1\gamma + A^1 > C^1,\quad C^1 d + B^1 > C^1\delta + B^1 > D^1, \text{ etc.}$$

et comme $b < \beta + 1$, $c < \gamma + 1$, $d < \delta + 1$, etc. on aura

$$b < B^1 + 1,$$

$$B^1 c + A^1 < B^1(\gamma + 1) + A^1 < C^1 + B^1,\quad C^1 d + B^1 < C^1(\delta + 1) + B^1 < D^1 + C^1, \text{ etc.}$$

de sorte que les erreurs qu'on commettroit en prenant les fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. pour la valeur de a, seroient respectivement moindres que

$$\frac{1}{A^1B^1},\ \frac{1}{B^1C^1},\ \frac{1}{C^1D^1},\ \text{etc.}$$

mais plus grandes que

$$\frac{1}{A^1(B^1+A^1)},\ \frac{1}{B^1(C^1+B^1)},\ \frac{1}{C^1(D^1+C^1)},\ \text{etc.}$$

d'où l'on voit combien ces erreurs sont petites, et combien elles vont en diminuant d'une fraction à l'autre.

Mais il y a plus: puisque les fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. sont alternativement plus petites et plus grandes que la quantité a, il est clair que la valeur de cette quantité se trouvera toujours entre deux fractions consécutives quelconques; or nous avons vu ci-dessus, (art. 12), qu'il est impossible qu'entre deux telles fractions puisse se trouver une autre fraction quelconque qui ait un dénominateur moindre que l'un de ceux de ces deux fractions; d'où l'on peut conclure que chacune des fractions dont il s'agit, exprime la quantité a plus exactement que ne pourroit faire toute autre fraction quelconque, dont le dénominateur seroit plus petit que celui de la fraction suivante; c'est-à-dire que la fraction $\frac{C}{C^1}$, par exemple, exprimera la valeur de a plus exactement que toute autre fraction $\frac{m}{n}$, dans laquelle n seroit moindre que D^1.

15. Si les valeurs approchées α, β, γ, etc. sont toutes ou en partie plus grandes que les véritables, alors parmi ces nombres il y en aura nécessairement de négatifs, (art. 3), ce qui rendra aussi négatifs quelques-uns des termes des séries A, B, C, etc. A^1, B^1, C^1, etc. par conséquent les différences entre les fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. et la quantité a ne seront plus alternativement positives et négatives, comme dans le cas de l'article précédent; de sorte que ces fractions n'auront plus l'avantage de donner toujours des limites en *plus* et en *moins* de la quantité a, avantage qui me paroît d'une très-grande importance, et qui doit par conséquent faire préférer toujours dans la pratique les fractions continues où les dénominateurs seront tous positifs. Ainsi nous ne considérerons plus dans la suite que des fractions de cette espece.

16. Considérons donc la série

$$\frac{A}{A^1},\ \frac{B}{B^1},\ \frac{C}{C^1},\ \frac{D}{D^1},\ \text{etc.}$$

dans laquelle les fractions sont alternativement plus petites et plus grandes que la quantité a, et il est clair qu'on pourra partager cette série en ces deux-ci:

$$\frac{A}{A^1},\ \frac{C}{C^1},\ \frac{E}{E^1},\ \text{etc.}$$

$$\frac{B}{B^1},\ \frac{D}{D^1},\ \frac{F}{F^1},\ \text{etc.}$$

donc la premiere sera composée de fractions toutes plus petites que a, et qui iront en augmentant vers la quantité a; donc la seconde sera composée de fractions toutes plus grandes que a, mais qui iront en diminuant vers cette même quantité. Examinons maintenant chacune de ces deux séries en particulier: dans la premiere on aura, (art. 10 et 12),

$$\frac{C}{C^1}-\frac{A}{A^1}=\frac{\gamma}{A^1C^1}$$

$$\frac{E}{E^1}-\frac{C}{C^1}=\frac{\varepsilon}{C^1E^1},\ \text{etc.}$$

et dans la seconde on aura

$$\frac{B}{B^1}-\frac{D}{D^1}=\frac{\delta}{B^1D^1}$$

$$\frac{D}{D^1}-\frac{F}{F^1}=\frac{\zeta}{D^1F^1},\ \text{etc.}$$

Or, si les nombres γ, δ, ε, etc. étoient tous égaux à l'unité, on pourroit prouver, comme dans l'art. 12, qu'entre deux fractions consécutives quelconques de l'une ou de l'autre des séries précédentes, il ne pourroit jamais se trouver aucune autre fraction dont le dénominateur seroit moindre que ceux de ces deux fractions; mais il n'en sera pas de même, lorsque les nombres γ, δ, ε, etc. seront différens de l'unité: car dans ce cas on pourra insérer entre les fractions dont il s'agit autant de fractions *intermédiaires* qu'il y aura d'unités dans les nombres $\gamma-1$, $\delta-1$, $\varepsilon-1$, etc. et pour cela il n'y aura qu'à mettre successivement dans les valeurs de C et C^1, (art. 10), les nombres 1, 2, 3, etc. γ à la place de γ; et de même dans les valeurs de D et D^1, les nombres 1, 2, 3, etc. δ à la place de δ, et ainsi de suite.

17. Supposons, par exemple, que γ soit $=4$, on aura $C=4B+A$ et $C^1=4B^1+A^1$, et on pourra insérer entre les fractions $\frac{A}{A^1}$ et $\frac{C}{C^1}$ trois fractions *intermédiaires*, qui seront

$$\frac{B+A}{B^1+A^1}, \quad \frac{2B+A}{2B^1+A^1}, \quad \frac{3B+A}{3B^1+A^1}.$$

Or il est clair que les dénominateurs de ces fractions forment une suite croissante arithmétiquement depuis A^1 jusqu'à C^1; et nous allons voir que les fractions elles-mêmes croissent aussi continuellement depuis $\frac{A}{A^1}$ jusqu'à $\frac{C}{C^1}$, en sorte qu'il seroit maintenant impossible d'insérer dans la série

$$\frac{A}{A^1}, \quad \frac{B+A}{B^1+A^1}, \quad \frac{2B+A}{2B^1+A^1}, \quad \frac{3B+A}{3B^1+A^1}, \quad \frac{4B+A}{4B^1+A^1} \text{ ou } \frac{C}{C^1}$$

aucune fraction dont la valeur tombât entre celles de deux fractions consécutives, et dont le dénominateur se trouvât aussi entre ceux des mêmes fractions. Car si on prend les différences entre les fractions précédentes, on aura, à cause de $BA^1-AB^1=1$,

$$\frac{B+A}{B^1+A^1}-\frac{A}{A^1}=\frac{1}{A^1(B^1+A^1)}$$

$$\frac{2B+A}{2B^1+A^1}-\frac{B+A}{B^1+A^1}=\frac{1}{(B^1+A^1)(2B^1+A^1)}$$

$$\frac{3B+A}{3B^1+A^1}-\frac{2B+A}{2B^1+A^1}=\frac{1}{(2B^1+A^1)(3B^1+A^1)}$$

$$\frac{C}{C^1}-\frac{3B+A}{3B^1+A^1}=\frac{1}{(3B^1+A^1)C^1};$$

d'où l'on voit d'abord que les fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B+A}{B^1+A^1}$, etc. vont en augmentant, puisque leurs différences sont toutes positives; ensuite, comme ces différences sont égales à l'unité divisée par le produit des deux dénominateurs, on pourra prouver par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait dans l'art. 12, qu'il est impossible qu'entre deux fractions consécutives de la série précédente, il puisse tomber une fraction quelconque $\frac{m}{n}$, si le dénominateur n tombe entre les dénominateurs de ces fractions, ou en général s'il est plus petit que le plus grand des deux dénominateurs.

De plus, comme les fractions dont nous parlons sont toutes plus petites[1]) que la vraie valeur de a, et que la fraction $\frac{B}{B^1}$ en est plus grande[1]), il est évident que chacune de ces fractions approchera de la quantité a, en sorte que la différence en sera plus petite que celle de la même fraction et de la fraction $\frac{B}{B^1}$; or on trouve

$$\frac{B}{B^1}-\frac{A}{A^1}=\frac{1}{A^1B^1}$$

$$\frac{B}{B^1}-\frac{B+A}{B^1+A^1}=\frac{1}{(B^1+A^1)B^1}$$

$$\frac{B}{B^1}-\frac{2B+A}{2B^1+A^1}=\frac{1}{(2B^1+A^1)B^1}$$

$$\frac{B}{B^1}-\frac{3B+A}{3B^1+A^1}=\frac{1}{(3B^1+A^1)B^1}$$

$$\frac{B}{B^1}-\frac{C}{C^1}=\frac{1}{C^1B^1}.$$

Donc, puisque ces différences sont aussi égales à l'unité divisée par le produit des dénominateurs, on y pourra appliquer le même raisonnement de l'article 12, pour prouver qu'aucune fraction $\frac{m}{n}$ ne sauroit tomber entre une quelconque des fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B+A}{B^1+A^1}$, $\frac{2B+A}{2B^1+A^1}$, etc. et la fraction $\frac{B}{B^1}$, si le dénominateur n est plus petit que celui de la même fraction; d'où il suit que chacune de ces fractions approche plus de la quantité a que ne pourroit faire toute autre fraction plus petite que a, et qui auroit un dénominateur plus petit, c'est-à-dire, qui seroit conçue en termes plus simples.

18. Nous n'avons considéré dans l'article précédent que les fractions *intermédiaires* entre $\frac{A}{A^1}$ et $\frac{C}{C^1}$, il en sera de même des fractions *intermédiaires* entre $\frac{C}{C^1}$ et $\frac{E}{E^1}$, entre $\frac{E}{E^1}$ et $\frac{G}{G^1}$, etc. si ε, η, etc. sont des nombres plus grands que l'unité.

On peut aussi appliquer à l'autre série $\frac{B}{B^1}$, $\frac{D}{D^1}$, $\frac{F}{F^1}$, etc. tout ce que nous

1) Edition originale: . . . *comme les fractions* . . . *sont toutes plus grandes* . . . *et que* . . . $\frac{B}{B^1}$ *en est plus petite* . . . A la suite de cette erreur qui se trouve dans toutes les éditions ultérieures, y compris celle de Serret, et qui se continue dans les 5 équations suivantes, il a fallu y changer les signes des différences. H. W.

venons de dire relativement à la premiere série $\frac{A}{A^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. de sorte que, si les nombres δ, ζ, etc. sont plus grands que l'unité, on pourra insérer entre les fractions $\frac{B}{B^1}$ et $\frac{D}{D^1}$, entre $\frac{D}{D^1}$ et $\frac{F}{F^1}$, etc. différentes fractions *intermédiaires* toutes plus grandes que a, mais qui iront continuellement en diminuant, et qui seront telles qu'elles exprimeront la quantité a plus exactement que ne pourroit faire aucune autre fraction plus grande que a, et qui seroit conçue en termes plus simples.

De plus, si β est aussi un nombre plus grand que l'unité, on pourra pareillement placer avant la fraction $\frac{B}{B^1}$ les fractions $\frac{A+1}{1}$, $\frac{2A+1}{2}$, $\frac{3A+1}{3}$, etc. jusqu'à $\frac{\beta A+1}{\beta}$, savoir $\frac{B}{B^1}$, et ces fractions auront les mêmes propriétés que les autres fractions *intermédiaires.*

De cette maniere on aura donc ces deux suites complettes de fractions convergentes vers la quantité a.

Fractions croissantes et plus petites que a:

$$\frac{A}{A^1},\quad \frac{B+A}{B^1+A^1},\quad \frac{2B+A}{2B^1+A^1},\quad \frac{3B+A}{3B^1+A^1}\quad \text{etc.}\quad \frac{\gamma B+A}{\gamma B^1+A^1},$$

$$\frac{C}{C^1},\quad \frac{D+C}{D^1+C^1},\quad \frac{2D+C}{2D^1+C^1},\quad \frac{3D+C}{3D^1+C^1}\quad \text{etc.}\quad \frac{\varepsilon D+C}{\varepsilon D^1+C^1},$$

$$\frac{E}{E^1},\quad \frac{F+E}{F^1+E^1},\quad \text{etc.}\quad \text{etc.}\quad \text{etc.}$$

Fractions décroissantes et plus grandes que a:

$$\frac{A+1}{1},\quad \frac{2A+1}{2},\quad \frac{3A+1}{3},\quad \text{etc.}\quad \frac{\beta A+1}{\beta},$$

$$\frac{B}{B^1},\quad \frac{C+B}{C^1+B^1},\quad \frac{2C+B}{2C^1+B^1},\quad \text{etc.}\quad \frac{\delta C+B}{\delta C^1+B^1},$$

$$\frac{D}{D^1},\quad \frac{E+D}{E^1+D^1},\quad \text{etc.}\quad \text{etc.}\quad \text{etc.}$$

Si la quantité a est irrationnelle ou transcendante, les deux séries précédentes iront à l'infini, puisque la série des fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. que nous nommerons dans la suite fractions *principales*, pour les distinguer des fractions *intermédiaires*, va d'elle-même à l'infini, (art. 10).

Mais si la quantité a est rationnelle et égale à une fraction quelconque $\frac{V}{V^1}$, nous avons vu dans l'article cité, que la série dont il s'agit sera terminée, et que la derniere fraction de cette série sera la fraction même $\frac{V}{V^1}$, donc cette fraction terminera aussi nécessairement une des deux séries ci-dessus, mais l'autre série pourra toujours aller à l'infini.

En effet, supposons que δ soit le dernier dénominateur de la fraction continue, alors $\frac{D}{D^1}$ sera la derniere des fractions *principales*, et la série des fractions plus grandes que a sera terminée par cette même fraction $\frac{D}{D^1}$; or l'autre série des fractions plus petites que a se trouvera naturellement arrêtée à la fraction $\frac{C}{C^1}$, qui précede $\frac{D}{D^1}$; mais pour la continuer, il n'y a qu'à considérer que le dénominateur ε, qui devroit suivre le dernier dénominateur δ, sera $=\infty$, (art. 3); de sorte que la fraction $\frac{E}{E^1}$, qui suivroit $\frac{D}{D^1}$ dans la suite des fractions *principales*, seroit $\frac{\infty D+C}{\infty D^1+C^1}=\frac{D}{D^1}$; or par la loi des fractions *intermédiaires*, il est clair qu'à cause de $\varepsilon=\infty$, on pourra insérer entre les fractions $\frac{C}{C^1}$ et $\frac{E}{E^1}$ une infinité de fractions *intermédiaires*, qui seront

$$\frac{D+C}{D^1+C^1},\quad \frac{2D+C}{2D^1+C^1},\quad \frac{3D+C}{3D^1+C^1},\quad \text{etc.}$$

Ainsi dans ce cas on pourra, après la fraction $\frac{C}{C^1}$ dans la premiere suite de fractions, placer encore les fractions *intermédiaires* dont nous parlons, et les continuer à l'infini.

PROBLEME

19. *Une fraction exprimée par un grand nombre de chiffres étant donnée, trouver toutes les fractions en moindres termes qui approchent si près de la vérité, qu'il soit impossible d'en approcher davantage sans en employer de plus grandes.*

Ce probleme se résoudra facilement par la théorie que nous venons d'expliquer.

On commencera par réduire la fraction proposée en fraction continue par la méthode de l'art. 4, en ayant soin de prendre toutes les valeurs approchées plus petites que les véritables, pour que les nombres β, γ, δ, etc. soient tous positifs; ensuite, à l'aide des nombres trouvés α, β, γ, etc. on formera, d'après les formules de l'art. 10, les fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. dont la derniere sera nécessairement la même que la fraction proposée, parce que dans ce cas la fraction continue est terminée. Ces fractions seront alternativement plus petites et plus grandes que la fraction donnée, et seront successivement conçues en termes plus grands; et de plus elles seront telles que chacune de ces fractions approchera plus de la fraction donnée, que ne pourroit faire toute autre fraction quelconque qui seroit conçue en termes moins simples. Ainsi on aura par ce moyen toutes les fractions conçues en moindres termes que la proposée, qui pourront satisfaire au probleme.

Que si on veut considérer en particulier les fractions plus petites et les fractions plus grandes que la proposée, on insérera entre les fractions précédentes autant de fractions *intermédiaires* que l'on pourra, et on en formera deux suites de fractions convergentes, les unes toutes plus petites et les autres toutes plus grandes que la fraction donnée, (art. 16, 17 et 18); chacune de ces suites aura en particulier les mêmes propriétés que la suite des fractions principales $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. car les fractions dans chaque suite seront successivement conçues en plus grands termes, et chacune d'elles approchera plus de la fraction proposée, que ne pourroit faire aucune autre fraction qui seroit pareillement plus petite ou plus grande que la proposée, mais qui seroit conçue en termes plus simples.

Au reste il peut arriver qu'une des fractions *intermédiaires* d'une série n'approche pas si près de la fraction donnée, qu'une des fractions de l'autre série, quoique conçue en termes moins simples que celle-ci; c'est pourquoi il ne convient d'employer les fractions *intermédiaires*, que lorsqu'on veut que les fractions cherchées soient toutes plus petites ou toutes plus grandes que la fraction donnée.

EXEMPLE I

20. Suivant M. DE LA CAILLE, l'année solaire est de $365^j\,5^h\,48'\,49''$, et par conséquent plus longue de $5^h\,48'\,49''$ que l'année commune de 365^j; si cette différence étoit exactement de 6 heures, elle donneroit un jour au bout de quatre années communes; mais si on veut savoir au juste au bout de combien d'années communes cette différence peut produire un certain nombre de jours, il faut chercher le rapport qu'il y a entre 24^h et $5^h\,48'\,49''$, et on trouve ce rapport $=\frac{86400}{20929}$; de sorte qu'on peut dire qu'au bout de 86400 années communes, il faudroit intercaler 20929 jours pour les réduire à des années tropiques.

Or, comme le rapport de 86400 à 20929 est exprimé en termes fort grands, on propose de trouver en des termes plus petits des rapports aussi approchés de celui-ci qu'il est possible.

On réduira donc la fraction $\frac{86400}{20929}$ en fraction continue par la regle donnée dans l'art. 4, qui est la même que celle qui sert à trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres donnés: on aura

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r|r|r|r|l}
20929 & 86400 & 4=\alpha &&&&&&&& \\
 & 83716 &&&&&&&&& \\
 & 2684 & 20929 & 7=\beta &&&&&&& \\
 & & 18788 &&&&&&&& \\
 & & 2141 & 2684 & 1=\gamma &&&&&& \\
 & & & 2141 &&&&&&& \\
 & & & 543 & 2141 & 3=\delta &&&&& \\
 & & & & 1629 &&&&&& \\
 & & & & 512 & 543 & 1=\varepsilon &&&& \\
 & & & & & 512 &&&&& \\
 & & & & & 31 & 512 & 16=\zeta &&& \\
 & & & & & & 496 &&&& \\
 & & & & & & 16 & 31 & 1=\eta && \\
 & & & & & & & 16 &&& \\
 & & & & & & & 15 & 16 & 1=\vartheta & \\
 & & & & & & & & 15 && \\
 & & & & & & & & 1 & 15 & 15=\iota \\
 & & & & & & & & & 15 & \\
 & & & & & & & & & 0. &
\end{array}$$

Connoissant ainsi tous les quotiens α, β, γ, etc. on en formera aisément la série $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, etc. de la maniere suivante:

$$\begin{array}{ccccccccc}
4, & 7, & 1, & 3, & 1, & 16, & 1, & 1, & 15, \\
\frac{4}{1}, & \frac{29}{7}, & \frac{33}{8}, & \frac{128}{31}, & \frac{161}{39}, & \frac{2704}{655}, & \frac{2865}{694}, & \frac{5569}{1349}, & \frac{86400}{20929},
\end{array}$$

où l'on voit que la derniere fraction est la même que la proposée.

Pour faciliter la formation de ces fractions, on écrira d'abord, comme je viens de le faire, la suite des quotiens 4, 7, 1, etc. et on placera au-dessous de ces coefficiens les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, etc. qui en résultent.

La premiere fraction aura toujours pour numérateur le nombre qui est au-dessus, et pour dénominateur l'unité.

La seconde aura pour numérateur le produit du nombre qui y est au-dessus par le numérateur de la premiere, plus l'unité, et pour dénominateur le nombre même qui est au-dessus.

La troisieme aura pour numérateur le produit du nombre qui y est au-dessus par le numérateur de la seconde, plus celui de la premiere; et de même pour dénominateur, le produit du nombre qui est au-dessus par le dénominateur de la seconde, plus celui de la premiere.

Et en général chaque fraction aura pour numérateur le produit du nombre qui y est au-dessus par le numérateur de la fraction précédente, plus celui de l'avant-précédente; et pour dénominateur le produit du même nombre par le dénominateur de la fraction précédente, plus celui de l'avant-précédente.

Ainsi $29 = 7 \cdot 4 + 1$, $7 = 7$, $33 = 1 \cdot 29 + 4$, $8 = 1 \cdot 7 + 1$, $128 = 3 \cdot 33 + 29$, $31 = 3 \cdot 8 + 7$, et ainsi de suite; ce qui s'accorde avec les formules de l'art. 10.

Maintenant on voit par les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, etc. que l'intercalation la plus simple est celle d'un jour dans quatre années communes, ce qui est le fondement du calendrier Julien; mais qu'on approcheroit plus de l'exactitude en n'intercalant que sept jours dans l'espace de vingt-neuf années communes, ou huit dans l'espace de trente-trois ans, et ainsi de suite.

On voit de plus que comme les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, etc. sont alternativement plus petites et plus grandes que la fraction $\frac{86400}{20929}$ ou $\frac{24^{h}}{5^{h}48'49''}$, l'intercalation d'un jour sur quatre ans sera trop forte, celle de sept jours sur vingt-neuf ans trop foible, celle de huit jours sur trente-trois ans trop forte, et ainsi de suite; mais chacune de ces intercalations sera toujours la plus exacte qu'il est possible dans le même espace de temps.

Or, si on range dans deux séries particulieres les fractions plus petites et les fractions plus grandes que la fraction donnée, on y pourra encore insérer différentes fractions secondaires pour compléter les séries; et pour cela on suivra le même procédé que ci-dessus, mais en prenant successivement à la place de chaque nombre de la série supérieure tous les nombres entiers moindres que ce nombre, (lorsqu'il y en a).

Ainsi, considérant d'abord les fractions croissantes

$$\begin{array}{ccccc} & 1, & 1, & 1, & 15, \\ \frac{4}{1}, & \frac{33}{8} & \frac{161}{39}, & \frac{2865}{694}, & \frac{86400}{20929}, \end{array}$$

on voit qu'à cause que l'unité est au-dessus de la seconde, de la troisieme et de la quatrieme, on ne pourra placer aucune fraction *intermédiaire*, ni entre la premiere et la seconde, ni entre la seconde et la troisieme, ni entre la troisieme et la quatrieme; mais comme la derniere fraction a au-dessus d'elle le nombre 15, on pourra entre cette fraction et la précédente, placer quatorze fractions *intermédiaires*, dont les numérateurs formeront la progression arithmétique

$$2865 + 5569, \quad 2865 + 2 \cdot 5569, \quad 2865 + 3 \cdot 5569, \quad \text{etc.}$$

et dont les dénominateurs formeront aussi la progression arithmétique

$$694 + 1349, \quad 694 + 2 \cdot 1349, \quad 694 + 3 \cdot 1349, \quad \text{etc.}$$

Par ce moyen la suite complette des fractions croissantes sera

$$\frac{4}{1}, \quad \frac{33}{8}, \quad \frac{161}{39}, \quad \frac{2865}{694}, \quad \frac{8434}{2043}, \quad \frac{14003}{3392}, \quad \frac{19572}{4741}, \quad \frac{25141}{6090}, \quad \frac{30710}{7439}, \quad \frac{36279}{8788},$$

$$\frac{41848}{10137}, \quad \frac{47417}{11486}, \quad \frac{52986}{12835}, \quad \frac{58555}{14184}, \quad \frac{64124}{15533}, \quad \frac{69693}{16882}, \quad \frac{75262}{18231}, \quad \frac{80831}{19580}, \quad \frac{86400}{20929}.$$

Et comme la derniere fraction est la même que la fraction donnée, il est clair que cette série ne peut pas être poussée plus loin.

De-là on voit que si on ne veut admettre que des intercalations qui pechent par excès, les plus simples et les plus exactes seront celles d'un jour sur quatre années, ou de huit jours sur trente-trois ans, ou de trente-neuf sur cent soixante-un ans, et ainsi de suite.

Considérons maintenant les fractions décroissantes

$$\begin{array}{cccc} 7, & 3, & 16, & 1, \\ \dfrac{29}{7}, & \dfrac{128}{31}, & \dfrac{2704}{655}, & \dfrac{5569}{1349}, \end{array}$$

et d'abord, à cause du nombre 7 qui est au-dessus de la premiere fraction, on pourra en placer six autres avant celle-ci, dont les numérateurs formeront la progression arithmétique $4+1$, $2 \cdot 4 + 1$, $3 \cdot 4 + 1$, etc. et dont les dénominateurs formeront la progression 1, 2, 3, etc.; de même, à cause du nombre 3, on pourra placer entre la premiere et la seconde fraction deux fractions *intermédiaires*; et entre la seconde et la troisieme on en pourra placer 15, à

67*

cause du nombre 16 qui est au-dessus de la troisieme; mais entre celle-ci et la derniere on n'en pourra insérer aucune, à cause que le nombre qui y est au-dessus est l'unité.

De plus, il faut remarquer que comme la série précédente n'est pas terminée par la fraction donnée, on peut encore la continuer aussi loin que l'on veut, comme nous l'avons fait voir dans l'art. 18. Ainsi on aura cette série de fractions croissantes

$$\frac{5}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{17}{4},\ \frac{21}{5},\ \frac{25}{6},\ \frac{29}{7},\ \frac{62}{15},\ \frac{95}{23},\ \frac{128}{31},\ \frac{289}{70},\ \frac{450}{109},\ \frac{611}{148},\ \frac{772}{187},$$

$$\frac{933}{226},\ \frac{1094}{265},\ \frac{1255}{304},\ \frac{1416}{343},\ \frac{1577}{382},\ \frac{1738}{421},\ \frac{1899}{460},\ \frac{2060}{499},\ \frac{2221}{538},\ \frac{2382}{577},\ \frac{2543}{616},$$

$$\frac{2704}{655},\ \frac{5569}{1349},\ \frac{91969}{22278},\ \frac{178369}{43207},\ \frac{264769}{64136},\ \frac{351169}{85065},\ \frac{437569}{105994},\ \text{etc.}$$

lesquelles sont toutes plus petites que la fraction proposée, et en approchent plus que toutes autres fractions qui seroient conçues en termes moins simples.

On peut conclure de-là, que si on ne vouloit avoir égard qu'aux intercalations qui pécheroient par défaut, les plus simples et les plus exactes seroient celles d'un jour sur cinq ans, ou de deux jours sur neuf ans, ou de trois jours sur treize ans, etc.

Dans le calendrier GRÉGORIEN on intercale seulement quatre-vingt dix-sept jours dans quatre cents années; on voit par la table précédente qu'on approcheroit beaucoup plus de l'exactitude en intercalant cent neuf jours en quatre cents cinquante années.

Mais il faut remarquer que dans la réformation GRÉGORIENNE on s'est servi de la détermination de l'année donnée par COPERNIC, laquelle est de $365^{\text{j}}\,5^{\text{h}}\,49'\,20''$. En employant cet élément on auroit, au lieu de la fraction $\frac{86400}{20929}$, celle-ci $\frac{86400}{20960}$, ou bien $\frac{540}{131}$; d'où l'on trouveroit par la méthode précédente les quotiens 4, 8, 5, 3, et de-là ces fractions *principales*

$$\begin{array}{cccc} 4, & 8, & 5, & 3, \\ \frac{4}{1}, & \frac{33}{8}, & \frac{169}{41}, & \frac{540}{131}, \end{array}$$

qui sont, à l'exception des deux premieres, assez différentes de celles que nous avons trouvées ci-dessus. Cependant on ne trouve pas parmi ces fractions la fraction $\frac{400}{97}$ adoptée dans le calendrier GRÉGORIEN; et cette fraction ne peut pas même se trouver parmi les fractions *intermédiaires* qu'on pourroit insérer dans les deux séries $\frac{4}{1}$, $\frac{169}{41}$, et $\frac{33}{8}$, $\frac{540}{131}$; car il est clair qu'elle ne pourroit tomber qu'entre ces deux dernieres fractions, entre lesquelles, à cause du nombre 3 qui est au-dessus de la fraction $\frac{540}{131}$, il peut tomber deux fractions *intermédiaires*, qui seront $\frac{202}{49}$ et $\frac{371}{90}$; d'où l'on voit qu'on auroit approché plus de l'exactitude, si dans la réformation GRÉGORIENNE on avoit prescrit de n'intercaler que quatre-vingt-dix jours dans l'espace de trois cents soixante et onze ans.

Si on réduit la fraction $\frac{400}{97}$ à avoir pour numérateur le nombre 86400, elle deviendra $\frac{86400}{20952}$, ce qui supposeroit l'année tropique de $365^{j}\,5^{h}\,49'\,12''$.

Dans ce cas l'interpolation GRÉGORIENNE seroit tout-à-fait exacte; mais comme les observations donnent l'année plus courte de plus de $20''$, il est clair qu'il faudra nécessairement, au bout d'un certain espace de temps, introduire une nouvelle intercalation.

Si on vouloit s'en tenir à la détermination de M. DE LA CAILLE, comme le dénominateur 97 de la fraction $\frac{400}{97}$ se trouve entre les dénominateurs de la cinquieme et de la sixieme des fractions principales trouvées ci-devant, il s'ensuit de ce que nous avons démontré, (art. 14), que la fraction $\frac{161}{39}$ approcheroit plus de la vérité que la fraction $\frac{400}{97}$; au reste, comme les Astronomes sont encore partagés sur la véritable longueur de l'année, nous nous abstiendrons de prononcer sur ce sujet; aussi n'avons-nous eu d'autre objet dans les détails que nous venons de donner, que de faciliter les moyens de se mettre au fait des fractions continues et de leurs usages; dans cette vue nous ajouterons encore l'exemple suivant.

EXEMPLE II

21. Nous avons déjà donné, (art. 8), la fraction continue qui exprime le rapport de la circonférence du cercle au diametre, en tant qu'elle résulte de la fraction de LUDOLPH; ainsi il n'y aura qu'à calculer, de la maniere enseignée dans l'exemple précédent, la série des fractions convergentes vers ce même rapport, laquelle sera

$$\begin{array}{ccccccccc} 3, & 7, & 15, & 1, & 292, & 1, & 1, & 1, & 2, \\ \frac{3}{1}, & \frac{22}{7}, & \frac{333}{106}, & \frac{355}{113}, & \frac{103993}{33102}, & \frac{104348}{33215}, & \frac{208341}{66317}, & \frac{312689}{99532}, & \frac{833719}{265381}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 3, & 1, & 14, & 2, & 1, \\ \frac{1146408}{364913}, & \frac{4272943}{1360120}, & \frac{5419351}{1725033}, & \frac{80143857}{25510582}, & \frac{165707065}{52746197}, & \frac{245850922}{78256779}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 2, & 2, & 2, \\ \frac{411557987}{131002976}, & \frac{1068966896}{340262731}, & \frac{2549491779}{811528438}, & \frac{6167950454}{1963319607}, & \frac{14885392687}{4738167652}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1, & 84, & 2, & 1, \\ \frac{21053343141}{6701487259}, & \frac{1783366216531}{567663097408}, & \frac{3587785776203}{1142027682075}, & \frac{5371151992734}{1709690779483}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1, & 15, & 3, & 13, \\ \frac{8958937768937}{2851718461558}, & \frac{139755218526789}{44485467702853}, & \frac{428224593349304}{136308121570117}, & \frac{5706674932067741}{1816491048114374}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1, & 4, & 2, \\ \frac{6134899525417045}{1952799169684491}, & \frac{30246273033735921}{9627687726852338}, & \frac{66627445592888887}{21208174623389167}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 6, & 6, & 1, \\ \frac{430010946591069243}{136876735467187340}, & \frac{2646693125139304345}{842468587426513207}, & \frac{3076704071730373588}{979345322893700547}. \end{array}$$

Ces fractions seront donc alternativement plus petites et plus grandes que la vraie raison de la circonférence au diametre, c'est-à-dire que la premiere $\frac{3}{1}$ sera plus petite, la seconde $\frac{22}{7}$ plus grande, et ainsi de suite; et chacune d'elles approchera plus de la vérité que ne pourroit faire toute autre fraction qui seroit exprimée en termes plus simples, ou, en général, qui auroit un dénominateur moindre que le dénominateur de la fraction suivante; de sorte que l'on peut assurer que la fraction $\frac{3}{1}$ approche plus de la vérité que ne peut faire aucune autre fraction dont le dénominateur seroit moindre que 7; de même la fraction $\frac{22}{7}$ approchera plus de la vérité que toute autre fraction dont le dénominateur seroit moindre que 106, et ainsi des autres.

Quant à l'erreur de chaque fraction, elle sera toujours moindre que l'unité divisée par le produit du dénominateur de cette fraction par celui de la fraction suivante. Ainsi l'erreur de la fraction $\frac{3}{1}$ sera moindre que $\frac{1}{7}$, celle de la fraction $\frac{22}{7}$ sera moindre que $\frac{1}{7\cdot 106}$, et ainsi de suite. Mais en même temps l'erreur de chaque fraction sera plus grande que l'unité divisée par le produit du dénominateur de cette fraction, par la somme de ce dénominateur et du dénominateur de la fraction suivante; de sorte que l'erreur de la fraction $\frac{3}{1}$ sera plus grande que $\frac{1}{8}$, celle de la fraction $\frac{22}{7}$ plus grande que $\frac{1}{7\cdot 113}$, et ainsi de suite, (art. 14).

Si on vouloit maintenant séparer les fractions plus petites que le rapport de la circonférence au diametre, d'avec les plus grandes, on pourroit, en insérant les fractions *intermédiaires* convenables, former deux suites de fractions, les unes croissantes et les autres décroissantes vers le vrai rapport dont il s'agit; on auroit de cette maniere

Fractions plus petites que $\frac{\textit{périph.}}{\textit{diam.}}$.

$$\frac{3}{1},\ \frac{25}{8},\ \frac{47}{15},\ \frac{69}{22},\ \frac{91}{29},\ \frac{113}{36},\ \frac{135}{43},\ \frac{157}{50},\ \frac{179}{57},\ \frac{201}{64},\ \frac{223}{71},\ \frac{245}{78},\ \frac{267}{85},\ \frac{289}{92},\ \frac{311}{99},\ \frac{333}{106},$$

$$\frac{688}{219},\ \frac{1043}{332},\ \frac{1398}{445},\ \frac{1753}{558},\ \frac{2108}{671},\ \frac{2463}{784},\ \text{etc.}$$

Fractions plus grandes que $\frac{\textit{périph.}}{\textit{diam.}}$

$$\frac{4}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{13}{4},\ \frac{16}{5},\ \frac{19}{6},\ \frac{22}{7},\ \frac{355}{113},\ \frac{104348}{33215},\ \frac{312689}{99532},\ \frac{1146408}{364913},\ \frac{5419351}{1725033},\ \frac{85563208}{27235615},$$

$$\frac{165707065}{52746197},\ \frac{411557987}{131002976},\ \frac{1480524883}{471265707},\ \text{etc.}$$

Chaque fraction de la premiere série approche plus de la vérité que ne peut faire aucune autre fraction exprimée en termes plus simples, et qui pécheroit aussi par défaut; et chaque fraction de la seconde série approche aussi plus de la vérité que ne peut faire aucune autre fraction exprimée en termes plus simples et péchant par excès.

Au reste ces séries deviendroient fort prolixes, si on vouloit les pousser aussi loin que nous avons fait celle des fractions *principales* donnée ci-dessus.

Les bornes de cet Ouvrage ne nous permettent pas de les insérer ici dans toute leur étendue, mais on peut les trouver au besoin dans le chap. XI de *l'Algebre* de WALLIS, (*Operum Mathemat.* vol. II.).

REMARQUE

22. La premiere solution de ce probleme a été donnée par WALLIS dans un petit Traité qu'il a joint aux *Œuvres posthumes* d'HORROCIUS, et on la retrouve dans l'endroit cité de son *Algebre;* mais la méthode de cet Auteur est indirecte et fort laborieuse. Celle que nous venons de donner est due à HUYGHENS, et on doit la regarder comme une des principales découvertes de ce grand Géometre. La construction de son automate planétaire paroît en avoir été l'occasion. En effet il est clair que pour pouvoir représenter exactement les mouvemens et les périodes des planetes, il faudroit employer des roues où les nombres des dents fussent précisément dans les mêmes rapports que les périodes dont il s'agit; mais comme on ne peut pas multiplier les dents au-delà d'une certaine limite dépendante de la grandeur de la roue, et que d'ailleurs les périodes des planetes sont incommensurables, ou du moins ne peuvent être représentées avec une certaine exactitude que par de très-grands nombres, on est obligé de se contenter d'un *à-peu-près,* et la difficulté se réduit à trouver des rapports exprimés en plus petits nombres, qui approchent autant qu'il est possible de la vérité, et plus que ne pourroient faire d'autres rapports quelconques qui ne seroient pas conçus en termes plus grands.

M. HUYGHENS résout cette question par le moyen des fractions continues, comme nous l'avons fait ci-dessus; il donne la maniere de former ces fractions par des divisions continuelles, et il démontre ensuite les principales propriétés des fractions convergentes qui en résultent, sans oublier même les fractions *intermédiaires.* Voyez dans ses *Opera posthuma* le Traité intitulé *Descriptio automati planetarii.*

D'autres grands Géometres ont ensuite considéré les fractions continues d'une maniere plus générale. On trouve sur-tout dans les Commentaires de Pétersbourg, (tom. IX et XI des anciens, et tom. IX et XI des nouveaux), des Mémoires de Mr. EULER[1]) remplis des recherches les plus savantes et les plus

1) Voir les mémoires 71, 123, 281 et 323 (suivant *l'Index* d'*ENESTRÖM*), *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 10 et 2. H. W.

ingénieuses sur ce sujet; mais la théorie de ces fractions, envisagée du côté arithmétique qui en est le plus intéressant, n'avoit pas encore été, ce me semble, autant cultivée qu'elle le méritoit; c'est ce qui m'a engagé à en composer ce petit Traité pour la rendre plus familiere aux Géometres. Voyez aussi les Mémoires de Berlin pour les années 1767 et 1768.[1])

Au reste cette théorie est d'un usage très-étendu dans toute l'Arithmétique, et il y a peu de problemes de cette science, au moins parmi ceux pour lesquels les regles ordinaires ne suffisent pas, qui n'en dépendent directement ou indirectement. Mr. JEAN BERNOULLI vient d'en faire une application heureuse et utile dans une nouvelle espece de calcul qu'il a imaginé pour faciliter la construction des tables de parties proportionnelles. Voyez le tome I de son *Recueil pour les Astronomes.*

1) Voir la note p. 514.	H. W.

PARAGRAPHE II

SOLUTIONS DE QUELQUES PROBLEMES CURIEUX ET NOUVEAUX D'ARITHMÉTIQUE

Quoique les problemes dont nous allons nous occuper aient un rapport immédiat avec le précédent, et dépendent des mêmes principes, nous croyons cependant devoir les traiter d'une maniere directe, et sans rien supposer de ce qui a été démontré jusqu'ici.

On aura par ce moyen la satisfaction de voir comment dans ces sortes de matieres on est nécessairement conduit à la théorie des fractions continues; d'ailleurs cette théorie en deviendra beaucoup plus lumineuse, et recevra par-là de nouveaux degrés de perfection.

PROBLEME I

23. *Etant donnée une quantité positive a, rationnelle ou non, et supposant que p et q ne puissent être que des nombres entiers positifs et premiers entr'eux, on demande de trouver des valeurs de p et q, telles que la valeur de $p - aq$, (abstraction faite du signe), soit plus petite qu'elle ne seroit, si on donnoit à p et q des valeurs moindres quelconques.*

Pour pouvoir résoudre ce probleme directement, nous commencerons par supposer que l'on ait en effet déjà trouvé des valeurs de p et q qui aient les conditions requises; donc prenant pour r et s des nombres quelconques entiers positifs moindres que p et q, il faudra que la valeur de $p - aq$ soit moindre que celle de $r - as$, abstraction faite des signes de ces deux quantités, c'est-à-dire en les prenant toutes deux positivement. Or je remarque d'abord que si les nombres r et s sont tels que $ps - qr = \pm 1$, le signe supérieur ayant lieu lorsque $p - aq$ est un nombre positif, et l'inférieur, lorsque $p - aq$ est un nombre négatif, on en peut conclure en général que la valeur de toute expression $y - az$ sera toujours plus grande, (abstraction faite du signe), que celle de $p - aq$, tant qu'on ne donnera à z et à y que des valeurs entieres, moindres que celles de p et q.

En effet, il est clair qu'on peut supposer en général

$$y = pt + ru, \quad \text{et} \quad z = qt + su,$$

t et u étant deux inconnues; or par la résolution de ces équations on a

$$t = \frac{sy - rz}{ps - qr}, \quad u = \frac{qy - pz}{qr - ps};$$

donc, à cause de $ps - qr = \pm 1$, $t = \pm (sy - rz)$, et $u = \mp (qy - pz)$; d'où l'on voit que t et u seront toujours des nombres entiers, puisque p, q, r, s et y, z sont supposés entiers.

Donc, t et u étant des nombres entiers, et p, q, r, s des nombres entiers positifs, il est clair que pour que les valeurs de y et z soient moindres que celles de p et q, il faudra nécessairement que les nombres t et u soient de signes différens.

Maintenant je remarque que la valeur de $r - as$ sera aussi de différent signe que celle de $p - aq$; car faisant $p - aq = P$, et $r - as = R$, on aura $\frac{p}{q} = a + \frac{P}{q}$, $\frac{r}{s} = a + \frac{R}{s}$; mais l'équation $ps - qr = \pm 1$, donne $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \pm \frac{1}{qs}$; donc $\frac{P}{q} - \frac{R}{s} = \pm \frac{1}{qs}$; donc, puisqu'on suppose que le signe ambigu soit pris conformément à celui de la quantité $p - aq$ ou P, il faudra que la quantité $\frac{P}{q} - \frac{R}{s}$ soit positive, si P est positif, et négative, si P est négatif; or comme s est $< q$, et que R est plus grand que P, (*hyp.*), il est clair que $\frac{R}{s}$ sera à plus forte raison plus grand que $\frac{P}{q}$, (abstraction faite du signe); donc la quantité $\frac{P}{q} - \frac{R}{s}$ sera toujours de signe différent de $\frac{R}{s}$, c'est-à-dire de R, puisque s est positif; donc P et R seront nécessairement de signes différens.

Cela posé, on aura, en substituant les valeurs ci-dessus de y et z, $y - az = (p - aq)t + (r - as)u = Pt + Ru$; or t et u étant de signes différens, aussi bien que P et R, il est clair que Pt et Ru seront des quantités de mêmes signes; donc puisque t et u sont d'ailleurs des nombres entiers, il est visible que la valeur de $y - az$ sera toujours plus grande que P, c'est-à-dire que la valeur de $p - aq$, abstraction faite des signes.

Mais il reste maintenant à savoir si, les nombres p et q étant donnés, on peut toujours trouver des nombres r et s moindres que ceux-là, et tels que $ps - qr = \pm 1$, les signes ambigus étant à volonté; or cela suit évidemment de la théorie des fractions continues; mais on peut aussi le démontrer directement et indépendamment de cette théorie. Car la difficulté se réduit à prouver qu'il existe nécessairement un nombre entier positif et moindre que p, lequel étant pris pour r, rendra $qr \pm 1$ divisible par p; or supposons qu'on substitue successivement à la place de r les nombres naturels 1, 2, 3, etc. jusqu'à p, et qu'on divise les nombres $q \pm 1$, $2q \pm 1$, $3q \pm 1$, etc. $pq \pm 1$ par p, on aura p restes moindres que p, qui seront nécessairement tous différens les uns des autres; car si, par exemple, $mq \pm 1$ et $nq \pm 1$, (m et n étant des nombres entiers différens qui ne surpassent pas p), étant divisés par p, donnoient un même reste, il est clair que leur différence, $(m-n)q$, devroit être divisible par p; or c'est ce qui ne se peut, à cause que q est premier à p, et que $m-n$ est un nombre moindre que p. Donc, puisque tous les restes dont il s'agit sont des nombres entiers positifs moindres que p et différens entr'eux, et que ces restes sont au nombre de p, il est clair qu'il faudra nécessairement que le zéro se trouve parmi ces restes, et conséquemment qu'il y ait un des nombres $q \pm 1$, $2q \pm 1$, $3q \pm 1$, etc. $pq \pm 1$, qui soit divisible par p; or il est clair que ce ne peut être le dernier; ainsi il y aura surement une valeur de r moindre que p, laquelle rendra $rq \pm 1$ divisible par p; et il est clair en même temps que le quotient sera moindre que q; donc il y aura toujours une valeur entiere et positive de r moindre que p, et une autre valeur pareille de s et moindre que q, lesquelles satisferont à l'équation $s = \frac{qr \pm 1}{p}$, ou $ps - qr = \pm 1$.

24. La question est donc réduite maintenant à trouver quatre nombres entiers et positifs, p, q, r, s, dont les deux derniers soient moindres que les premiers, c'est-à-dire $r < p$ et $s < q$, et qui soient tels que $ps - qr = \pm 1$, que de plus les quantités $p - aq$ et $r - as$ soient de signes différens, et qu'en même temps $r - as$ soit une quantité plus grande que $p - aq$, abstraction faite des signes.

Désignons, pour plus de simplicité, r par p^{I} et s par q^{I}, en sorte que l'on ait $pq^{\mathrm{I}} - qp^{\mathrm{I}} = \pm 1$; et comme $q > q^{\mathrm{I}}$, (*hyp.*), soit μ le quotient qui proviendroit de la division de q par q^{I}, et soit le reste q^{II}, qui sera par conséquent $< q^{\mathrm{I}}$; soit de même μ^{I} le quotient de la division de q^{I} par q^{II}, et q^{III} le reste, qui sera $< q^{\mathrm{II}}$; pareillement soit μ^{II} le quotient de la division de q^{II} par q^{III}, et q^{IV} le reste $< q^{\mathrm{III}}$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste nul; on aura de cette maniere

$$\begin{aligned} q &= \mu q^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{II}} \\ q^{\mathrm{I}} &= \mu^{\mathrm{I}} q^{\mathrm{II}} + q^{\mathrm{III}} \\ q^{\mathrm{II}} &= \mu^{\mathrm{II}} q^{\mathrm{III}} + q^{\mathrm{IV}} \\ q^{\mathrm{III}} &= \mu^{\mathrm{III}} q^{\mathrm{IV}} + q^{\mathrm{V}}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

où les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. seront tous entiers et positifs, et où les nombres q, q^{I}, q^{II}, q^{III}, etc. seront aussi entiers positifs, et formeront une suite décroissante jusqu'à zéro.

Supposons pareillement

$$\begin{aligned} p &= \mu p^{\mathrm{I}} + p^{\mathrm{II}} \\ p^{\mathrm{I}} &= \mu^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{III}} \\ p^{\mathrm{II}} &= \mu^{\mathrm{II}} p^{\mathrm{III}} + p^{\mathrm{IV}} \\ p^{\mathrm{III}} &= \mu^{\mathrm{III}} p^{\mathrm{IV}} + p^{\mathrm{V}}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Et comme les nombres p et p^{I} sont regardés ici comme donnés, aussi bien que les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. on pourra déterminer par ces équations les nombres p^{II}, p^{III}, p^{IV}, etc. qui seront évidemment tous entiers.

Maintenant, comme on doit avoir $pq^{\mathrm{I}} - qp^{\mathrm{I}} = \pm 1$, on aura aussi, en substituant les valeurs précédentes de p et q, et effaçant ce qui se détruit, $p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{I}} - q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{I}} = \pm 1$; et substituant de nouveau dans cette équation les valeurs de p^{I} et q^{I}, il viendra $p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}} - q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}} = \pm 1$, et ainsi de suite; de sorte qu'on aura en général

$$\begin{aligned} pq^{\mathrm{I}} - qp^{\mathrm{I}} &= \pm 1 \\ p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}} - q^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{II}} &= \mp 1 \\ p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}} - q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}} &= \pm 1 \\ p^{\mathrm{III}}q^{\mathrm{IV}} - q^{\mathrm{III}}p^{\mathrm{IV}} &= \mp 1, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Donc, si q^{III}, par exemple, étoit nul, on auroit $-q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}} = \pm 1$; donc $q^{\mathrm{II}} = 1$ et $p^{\mathrm{III}} = \mp 1$; mais si q^{IV} étoit $= 0$, on auroit $-q^{\mathrm{III}}p^{\mathrm{IV}} = \mp 1$; donc $q^{\mathrm{III}} = 1$ et $p^{\mathrm{IV}} = \pm 1$; donc en général, si $q^{\varrho} = 0$, on aura $q^{\varrho-1} = 1$; et ensuite $p^{\varrho} = \pm 1$, si ϱ est pair, et $p^{\varrho} = \mp 1$, si ϱ est impair.

Or, comme on ne sait pas d'avance si c'est le signe supérieur ou l'inférieur qui doit avoir lieu, il faudroit supposer successivement $p^{\varrho} = 1$ et $= -1$; mais je remarque que l'on peut toujours ramener l'un de ces cas à l'autre;

et pour cela il est clair qu'il suffit de prouver qu'on peut toujours faire en sorte que le ϱ du terme q^ϱ qui doit être nul, soit pair ou impair à volonté. En effet, supposons, par exemple, que q^{IV} soit $=0$, on aura donc $q^{\text{III}}=1$ et $q^{\text{II}}>1$, c'est-à-dire $q^{\text{II}}=2$ ou >2, à cause que les nombres q, q^{I}, q^{II}, etc. forment naturellement une série décroissante; donc, puisque $q^{\text{II}}=\mu^{\text{II}}q^{\text{III}}+q^{\text{IV}}$, on aura $q^{\text{II}}=\mu^{\text{II}}$, de sorte que μ^{II} sera $=$ ou >2; ainsi on pourra, si l'on veut, diminuer μ^{II} d'une unité, sans que ce nombre devienne nul, et alors q^{IV}, qui étoit $=0$, deviendra $=1$, et q^{V} sera $=0$; car mettant $\mu^{\text{II}}-1$ à la place de μ^{II}, on aura $q^{\text{II}}=(\mu^{\text{II}}-1)q^{\text{III}}+q^{\text{IV}}$; mais $q^{\text{II}}=\mu^{\text{II}}$, $q^{\text{III}}=1$; donc $q^{\text{IV}}=1$; ensuite ayant $q^{\text{III}}=\mu^{\text{III}}q^{\text{IV}}+q^{\text{V}}$, c'est-à-dire $1=\mu^{\text{III}}+q^{\text{V}}$, on aura nécessairement $\mu^{\text{III}}=1$ et $q^{\text{V}}=0$.

De-là on peut donc conclure en général que, si $q^\varrho=0$, on aura $q^{\varrho-1}=1$ et $p^\varrho=\pm 1$, le signe ambigu étant à volonté.

Maintenant, si on substitue les valeurs de p et q données par les formules précédentes dans $p-aq$, celles de p^{I} et q^{I} dans $p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}$, et ainsi des autres, on aura

$$\begin{aligned}
p-aq &= \mu\,(p^{\text{I}}-aq^{\text{I}})+p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}\\
p^{\text{I}}-aq^{\text{I}} &= \mu^{\text{I}}\,(p^{\text{II}}-aq^{\text{II}})+p^{\text{III}}-aq^{\text{III}}\\
p^{\text{II}}-aq^{\text{II}} &= \mu^{\text{II}}\,(p^{\text{III}}-aq^{\text{III}})+p^{\text{IV}}-aq^{\text{IV}}\\
p^{\text{III}}-aq^{\text{III}} &= \mu^{\text{III}}(p^{\text{IV}}-aq^{\text{IV}})+p^{\text{V}}-aq^{\text{V}},\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{aq^{\text{II}}-p^{\text{II}}}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}+\frac{p-aq}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}\\
\mu^{\text{I}} &= \frac{aq^{\text{III}}-p^{\text{III}}}{p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}}+\frac{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}{p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}}\\
\mu^{\text{II}} &= \frac{aq^{\text{IV}}-p^{\text{IV}}}{p^{\text{III}}-aq^{\text{III}}}+\frac{p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}}{p^{\text{III}}-aq^{\text{III}}}\\
\mu^{\text{III}} &= \frac{aq^{\text{V}}-p^{\text{V}}}{p^{\text{IV}}-aq^{\text{IV}}}+\frac{p^{\text{III}}-aq^{\text{III}}}{p^{\text{IV}}-aq^{\text{IV}}},\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

Or, comme, (*hyp.*), les quantités $p-aq$ et $p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}$ sont de signes différens, et que de plus $p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}$ doit être, (abstraction faite des signes), $>p-aq$, il s'ensuit que $\frac{p-aq}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}$ sera une quantité négative et plus petite que l'unité. Donc, pour que μ soit un nombre entier positif, comme il le faut, il est clair que $\frac{aq^{\text{II}}-p^{\text{II}}}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}$ doit être une quantité positive plus grande que l'unité; et il est visible en même temps que μ ne peut être que le nombre entier, qui est immédiatement moindre que $\frac{aq^{\text{II}}-p^{\text{II}}}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}$, c'est-à-dire, qui est contenu entre ces limites $\frac{aq^{\text{II}}-p^{\text{II}}}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}$ et $\frac{aq^{\text{II}}-p^{\text{II}}}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}-1$; car puisque $-\frac{p-aq}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}>0$ et <1, on aura $\mu<\frac{aq^{\text{II}}-p^{\text{II}}}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}$ et $>\frac{aq^{\text{II}}-p^{\text{II}}}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}-1$.

De même, puisque nous venons de voir que $\frac{aq^{\text{II}}-p^{\text{II}}}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}$ doit être une quantité positive plus grande que l'unité, il s'ensuit que $\frac{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}{p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}}$ sera une quantité négative plus petite que l'unité, (je dis plus petite que l'unité, en faisant abstraction du signe). Donc, pour que μ^{I} soit un nombre entier positif, il faudra que $\frac{aq^{\text{III}}-p^{\text{III}}}{p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}}$ soit une quantité positive plus grande que l'unité, et le nombre μ^{I} ne pourra être par conséquent que le nombre entier, qui sera immédiatement au-dessous de la quantité $\frac{aq^{\text{III}}-p^{\text{III}}}{p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}}$.

On prouvera de la même maniere et par la considération, que μ^{II} doit être un nombre entier positif, que la quantité $\frac{aq^{\text{IV}}-p^{\text{IV}}}{p^{\text{III}}-aq^{\text{III}}}$ sera nécessairement positive et au-dessus de l'unité, et que μ^{II} ne pourra être que le nombre entier, qui sera immédiatement au-dessous de la même quantité, et ainsi de suite.

Il s'ensuit de-là, 1°. que les quantités $p-aq$, $p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}$, $p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}$, etc. seront successivement de signes différens, c'est-à-dire alternativement positives et négatives, et qu'elles formeront une suite continuellement croissante; 2°. que si on désigne par le signe $<$ le nombre entier, qui est immédiatement moindre que la valeur de la quantité placée après ce signe, on aura pour la détermination des nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc.

$$\mu<\frac{aq^{\text{II}}-p^{\text{II}}}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}$$
$$\mu^{\text{I}}<\frac{aq^{\text{III}}-p^{\text{III}}}{p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}}$$
$$\mu^{\text{II}}<\frac{aq^{\text{IV}}-p^{\text{IV}}}{p^{\text{III}}-aq^{\text{III}}},\ \text{etc.}$$

Or nous avons vu plus haut que la série q, q^{I}, q^{II}, etc. doit se terminer par zéro, et qu'alors le terme précédent sera $=1$, et le terme correspondant à zéro dans l'autre série p, p^{I}, p^{II}, etc. sera $=\pm 1$ à volonté.

Ainsi supposons, par exemple, que l'on ait $q^{\text{IV}}=0$, on aura donc $q^{\text{III}}=1$ et $p^{\text{IV}}=1$; donc $p^{\text{III}}-aq^{\text{III}}=p^{\text{III}}-a$, et $p^{\text{IV}}-aq^{\text{IV}}=1$; donc il faudra que $p^{\text{III}}-a$ soit une quantité négative et moindre que 1, abstraction faite du signe; c'est-à-dire que $a-p^{\text{III}}$ devra être >0 et <1; de sorte que p^{III} ne pourra être que le nombre entier, qui sera immédiatement au-dessous de a; on connoîtra donc les valeurs de ces quatre termes

$$\begin{array}{ll} p^{\text{IV}}=1 & q^{\text{IV}}=0 \\ p^{\text{III}}<a & q^{\text{III}}=1, \end{array}$$

à l'aide desquelles on pourra, en remontant par les formules ci-dessus, trouver tous les termes précédens. En effet on aura d'abord la valeur de μ^{II}, ensuite on aura p^{II} et q^{II} par les formules $p^{\text{II}}=\mu^{\text{II}}p^{\text{III}}+p^{\text{IV}}$ et $q^{\text{II}}=\mu^{\text{II}}q^{\text{III}}+q^{\text{IV}}$; de-là on trouvera μ^{I} et ensuite p^{I} et q^{I}, et ainsi du reste.

En général soit $q^{\varrho}=0$, on aura $q^{\varrho-1}$ et $p^{\varrho}=1$; et on prouvera, comme ci-dessus, que $p^{\varrho-1}$ ne pourra être que le nombre entier qui est immédiatement au-dessous de a; de sorte qu'on aura ces quatre termes

$$\begin{array}{ll} p^{\varrho}=1 & q^{\varrho}=0 \\ p^{\varrho-1}<a & q^{\varrho-1}=1; \end{array}$$

ensuite on aura

$$\mu^{\varrho-2}<\frac{aq^{\varrho}-p^{\varrho}}{p^{\varrho-1}-aq^{\varrho-1}}<\frac{1}{a-p^{\varrho-1}}$$

$$p^{\varrho-2}=\mu^{\varrho-2}p^{\varrho-1}+p^{\varrho},\quad q^{\varrho-2}=\mu^{\varrho-2}q^{\varrho-1}+q^{\varrho}$$

$$\mu^{\varrho-3}<\frac{aq^{\varrho-1}-p^{\varrho-1}}{p^{\varrho-2}-aq^{\varrho-2}}$$

$$p^{\varrho-3}=\mu^{\varrho-3}p^{\varrho-2}+p^{\varrho-1},\quad q^{\varrho-3}=\mu^{\varrho-3}q^{\varrho-2}+q^{\varrho-1},$$

et ainsi de suite.

On pourra donc remonter de cette maniere aux premiers termes p et q; mais nous remarquerons que tous les termes suivans, p^{I}, q^{I}, p^{II}, q^{II}, etc. jouissent des mêmes propriétés que ceux-là, et résolvent également le probleme proposé. Car il est visible par les formules précédentes que les nombres $p, p^{\text{I}}, p^{\text{II}}$, etc. et $q, q^{\text{I}}, q^{\text{II}}$, etc. sont tous entiers positifs, et forment deux séries continuellement décroissantes, dont la premiere se termine par l'unité, et la seconde par zéro.

De plus, on a vu que ces nombres sont tels, que $pq^{\text{I}}-qp^{\text{I}}=\pm 1$, $p^{\text{I}}q^{\text{II}}-q^{\text{I}}p^{\text{II}}=\mp 1$, etc. et que les quantités $p-aq$, $p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}$, $p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}$, etc.

sont alternativement positives et négatives, et forment en même temps une suite continuellement croissante. D'où il suit que les mêmes conditions qui ont lieu entre les quatre nombres p, q, r, s, ou $p, q, p^{\mathrm{I}}, q^{\mathrm{I}}$, et d'où dépend la solution du probleme, comme on l'a vu plus haut, ont lieu également entre les nombres $p^{\mathrm{I}}, q^{\mathrm{I}}, p^{\mathrm{II}}, q^{\mathrm{II}}$, et entre ceux-ci, $p^{\mathrm{II}}, q^{\mathrm{II}}, p^{\mathrm{III}}, q^{\mathrm{III}}$, et ainsi de suite.

Donc, en commençant par les derniers termes p^{ϱ} et q^{ϱ}, et remontant toujours par les formules qu'on vient de trouver, on aura successivement toutes les valeurs de p et q qui peuvent résoudre la question proposée.[1])

---

1) Dans l'avertissement de toutes les éditions ultérieures se trouve la remarque suivante: „Dans cette nouvelle édition, on a fait quelques changements à l'analyse du Probleme I du § II, pour la rendre plus directe et plus facile à suivre". Il est possible que ces changements proviennent de LAGRANGE lui-même, bien qu'on ne puisse le prouver. Abstraction faite de quelques modifications de rédaction, l'essentiel de ces changements consiste en ceci:

Il s'agit de la détermination de la série croissante de grandeurs:

$$p - aq, \quad p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}}, \quad p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}, \quad \text{etc.}$$

Dans la plus ancienne édition qui a servi de base à celle-ci et qui date de 1774, on ne suppose connu que les quatre nombres $p, q, p^{\mathrm{I}}, q^{\mathrm{I}}$, satisfaisant à la condition $pq^{\mathrm{I}} - qp^{\mathrm{I}} = \pm 1$. Puis, on détermine les μ ainsi que les $q^{\mathrm{II}}, q^{\mathrm{III}}$, etc. par l'algorithme d'EUCLIDE:

$$q = \mu q^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{II}}, \quad q^{\mathrm{I}} = \mu^{\mathrm{I}} q^{\mathrm{II}} + q^{\mathrm{III}}, \quad q^{\mathrm{II}} = \mu^{\mathrm{II}} q^{\mathrm{III}} + q^{\mathrm{IV}}, \quad \text{etc.}$$

ensuite les $p^{\mathrm{II}}, p^{\mathrm{III}}, p^{\mathrm{IV}}$, etc. par les équations:

$$p = \mu p^{\mathrm{I}} + p^{\mathrm{II}}, \quad p^{\mathrm{I}} = \mu^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{III}}, \quad p^{\mathrm{II}} = \mu^{\mathrm{II}} p^{\mathrm{III}} + p^{\mathrm{IV}}, \quad \text{etc.}$$

Il faut alors démontrer, par une longue série de considérations, que les grandeurs $p^i - aq^i$ forment une série croissante.

Dans la rédaction ultérieure, le point de départ est la série d'équations

$$pq^{\mathrm{I}} - qp^{\mathrm{I}} = \pm 1, \quad p^{\mathrm{I}} q^{\mathrm{II}} - q^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}} = \mp 1, \quad p^{\mathrm{II}} q^{\mathrm{III}} - q^{\mathrm{II}} p^{\mathrm{III}} = \pm 1, \quad \text{etc.}$$

où l'on sait déjà que les $p, p^{\mathrm{I}}, p^{\mathrm{II}}$, etc. d'une part, les $q, q^{\mathrm{I}}, q^{\mathrm{II}}$, etc. d'autre part, sont des suites décroissantes de nombres, et que les $p^i - aq^i$ vont en augmentant. De ces équations, il suit:

$$\begin{gathered} q^{\mathrm{I}}(p - p^{\mathrm{II}}) = p^{\mathrm{I}}(q - q^{\mathrm{II}}) \\ q^{\mathrm{II}}(p^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{III}}) = p^{\mathrm{II}}(q^{\mathrm{I}} - q^{\mathrm{III}}) \\ \text{etc.} \end{gathered}$$

et de là, vu que p^i et q^i sont premiers entr'eux:

$$\begin{array}{ll} p = \mu p^{\mathrm{I}} + p^{\mathrm{II}} & q = \mu q^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{II}} \\ p^{\mathrm{I}} = \mu^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{III}} & q^{\mathrm{I}} = \mu^{\mathrm{I}} q^{\mathrm{II}} + q^{\mathrm{III}} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

H. W.

25. Comme les valeurs des termes p^ϱ, $p^{\varrho-1}$, etc. q^ϱ, $q^{\varrho-1}$, etc. sont indépendantes de l'exposant ϱ, nous pouvons en faire abstraction, et désigner les termes de ces deux séries croissantes de cette maniere,

$$p^0,\ p^{\mathrm{I}},\ p^{\mathrm{II}},\ p^{\mathrm{III}},\ p^{\mathrm{IV}},\ \text{etc.} \qquad q^0,\ q^{\mathrm{I}},\ q^{\mathrm{II}},\ q^{\mathrm{III}},\ q^{\mathrm{IV}},\ \text{etc.}$$

ainsi nous aurons les déterminations suivantes,

$$\begin{array}{ll}
p^0 = 1 & q^0 = 0 \\
p^{\mathrm{I}} = \mu & q^{\mathrm{I}} = 1 \\
p^{\mathrm{II}} = \mu^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{I}} + 1 & q^{\mathrm{II}} = \mu^{\mathrm{I}} \\
p^{\mathrm{III}} = \mu^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{I}} & q^{\mathrm{III}} = \mu^{\mathrm{II}}\, q^{\mathrm{II}} + q^{\mathrm{I}} \\
p^{\mathrm{IV}} = \mu^{\mathrm{III}} p^{\mathrm{III}} + p^{\mathrm{II}} & q^{\mathrm{IV}} = \mu^{\mathrm{III}}\, q^{\mathrm{III}} + q^{\mathrm{II}} \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
\mu &< a \\
\mu^{\mathrm{I}} &< \frac{p^0 - aq^0}{aq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}} < \frac{1}{a-\mu} \\
\mu^{\mathrm{II}} &< \frac{aq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}}{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}} \\
\mu^{\mathrm{III}} &< \frac{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}}{aq^{\mathrm{III}} - p^{\mathrm{III}}} \\
\mu^{\mathrm{IV}} &< \frac{aq^{\mathrm{III}} - p^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{IV}} - aq^{\mathrm{IV}}},\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

où le signe $<$ dénote le nombre entier qui est immédiatement moindre que la valeur de la quantité placée après ce signe.

On trouvera ainsi successivement toutes les valeurs de p et q qui pourront satisfaire au probleme, ces valeurs ne pouvant être que les termes correspondans des deux séries

$$p^0,\ p^{\mathrm{I}},\ p^{\mathrm{II}},\ p^{\mathrm{III}},\ \text{etc.} \quad \text{et} \ q^0,\ q^{\mathrm{I}},\ q^{\mathrm{II}},\ q^{\mathrm{III}},\ \text{etc.}$$

COROLLAIRE I

26. Si on fait

$$b = \frac{p^0 - aq^0}{aq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}}$$

$$c = \frac{aq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}}{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}}$$

$$d = \frac{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}}{aq^{\mathrm{III}} - p^{\mathrm{III}}}, \quad \text{etc.}$$

on aura, comme il est facile de le voir,

$$b = \frac{1}{a - \mu}$$

$$c = \frac{1}{b - \mu^{\mathrm{I}}}$$

$$d = \frac{1}{c - \mu^{\mathrm{II}}}, \quad \text{etc.}$$

et $\mu < a$, $\mu^{\mathrm{I}} < b$, $\mu^{\mathrm{II}} < c$, $\mu^{\mathrm{III}} < d$, etc. donc les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. ne seront autre chose que ceux que nous avons désignés par α, β, γ, etc. dans l'art. 3, c'est-à-dire que ces nombres seront les termes de la fraction continue qui représente la valeur de a, en sorte que l'on aura ici

$$a = \mu + \frac{1}{\mu^{\mathrm{I}} + \frac{1}{\mu^{\mathrm{II}} +, \text{ etc.}}}$$

Par conséquent les nombres p^{I}, p^{II}, p^{III}, etc. seront les numérateurs, et q^{I}, q^{II}, q^{III}, etc. les dénominateurs des fractions convergentes vers a, fractions que nous avons désignées ci-devant par $\frac{A}{A^{\mathrm{I}}}$, $\frac{B}{B^{\mathrm{I}}}$, $\frac{C}{C^{\mathrm{I}}}$, etc. (art. 10).

Ainsi tout se réduit à convertir la valeur de a en une fraction continue, dont tous les termes soient positifs, ce qu'on peut exécuter par les méthodes exposées plus haut, pourvu qu'on ait soin de prendre toujours les valeurs approchées en défaut; ensuite il n'y aura plus qu'à former la suite des fractions *principales* convergentes vers a, et les termes de chacune de ces fractions donneront des valeurs de p et q, qui résoudront le probleme proposé; de sorte que $\frac{p}{q}$ ne pourra être qu'une de ces mêmes fractions.

COROLLAIRE II

27. Il résulte de-là une nouvelle propriété des fractions dont nous parlons; c'est que nommant $\frac{p}{q}$ une des fractions *principales* convergentes vers a,

(pourvu qu'elles soient déduites d'une fraction continue, dont tous les termes soient positifs), la quantité $p - aq$ aura toujours une valeur plus petite, (abstraction faite du signe), qu'elle n'auroit, si on y mettoit à la place de p et q d'autres nombres moindres quelconques.

PROBLEME II

28. *Etant proposée la quantité*

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 +, \text{ etc. } + Vq^m,$$

dans laquelle A, B, C, etc. sont des nombres entiers donnés positifs ou négatifs, et où p et q sont des nombres indéterminés qu'on suppose devoir être entiers et positifs; on demande quelles valeurs on doit donner à p et q, pour que la quantité proposée devienne la plus petite qu'il est possible.

Soient α, β, γ, etc. les racines réelles, et $\mu \pm \nu\sqrt{-1}$, $\pi \pm \varrho\sqrt{-1}$, etc. les racines imaginaires de l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +, \text{ etc. } + V = 0,$$

on aura par la théorie des équations

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 +, \text{ etc. } + Vq^m = A(p-\alpha q)(p-\beta q)(p-\gamma q)\ldots$$
$$(p-(\mu+\nu\sqrt{-1})q)(p-(\mu-\nu\sqrt{-1})q)(p-(\pi+\varrho\sqrt{-1})q)(p-(\pi-\varrho\sqrt{-1})q)\ldots.$$
$$= A(p-\alpha q)(p-\beta q)(p-\gamma q)\ldots((p-\mu q)^2+\nu^2q^2)((p-\pi q)^2+\varrho^2q^2)\ldots$$

Donc la question se réduit à faire en sorte que le produit des quantités $p-\alpha q$, $p-\beta q$, $p-\gamma q$, etc. et $(p-\mu q)^2+\nu^2q^2$, $(p-\pi q)^2+\varrho^2q^2$, etc. soit le plus petit qu'il est possible, tant que p et q sont des nombres entiers positifs.

Supposons qu'on ait trouvé les valeurs de p et q qui répondent au *minimum*; et si l'on met à la place de p et q d'autres nombres moindres, il faudra que le produit dont il s'agit, acquiere une valeur plus grande. Donc il faudra nécessairement que quelqu'un des facteurs augmente de valeur. Or il est visible que si α, par exemple, étoit négatif, le facteur $p-\alpha q$ diminueroit toujours, lorsque p et q décroîtroient; la même chose arriveroit au facteur $(p-\mu q)^2+\nu^2q^2$, si μ étoit négatif, et ainsi des autres; d'où il s'ensuit que parmi les facteurs simples réels il n'y a que ceux où les racines sont positives, qui puissent augmenter de valeur; et parmi les facteurs doubles imaginaires, il n'y aura que ceux où la partie réelle de la racine imaginaire sera positive, qui puissent augmenter aussi; de plus il faut remarquer à l'égard de ces derniers, que pour que $(p-\mu q)^2+\nu^2 q^2$ augmente tandis que p et q diminuent, il faut nécessairement que la partie $(p-\mu q)^2$ augmente, parce que l'autre terme $\nu^2 q^2$ diminue nécessairement; de sorte que l'augmentation de ce facteur dépendra de la quantité $p-\mu q$, et ainsi des autres.

Donc les valeurs de p et q qui répondent au *minimum*, doivent être telles que la quantité $p-aq$ augmente, en donnant à p et q des valeurs moindres, et prenant pour a une des racines réelles positives de l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +, \text{ etc. } + V = 0,$$

ou une des parties réelles positives des racines imaginaires de la même équation, s'il y en a.

Soient r et s deux nombres entiers positifs moindres que p et q; il faudra donc que $r-as$ soit $> p-aq$, (abstraction faite du signe de ces deux quantités). Qu'on suppose, comme dans l'article 23, que ces nombres soient tels que $ps-qr=\pm 1$, le signe supérieur ayant lieu, lorsque $p-aq$ est positive; et l'inférieur, lorsque $p-aq$ est négative; en sorte que les deux quantités $p-aq$ et $r-as$ deviennent de différens signes, et l'on aura exactement le cas auquel nous avons réduit le probleme précédent, (art. 24), et dont nous avons déjà donné la solution.

Donc, (art. 26), les valeurs de p et q devront nécessairement se trouver parmi les termes des fractions *principales* convergentes vers a, c'est-à-dire vers quelqu'une des quantités que nous avons dit pouvoir être prises pour a. Ainsi il faudra réduire toutes ces quantités en fractions continues, (ce qu'on pourra exécuter facilement par les méthodes enseignées ailleurs), et en déduire ensuite les fractions convergentes dont il s'agit, après quoi on fera successivement p égal à tous les numérateurs de ces fractions, et q égal aux dénominateurs correspondans, et celle de ces suppositions qui donnera la moindre valeur de la fonction proposée, sera nécessairement aussi celle qui répondra au *minimum* cherché.

REMARQUE I

29. Nous avons supposé que les nombres p et q devoient être tous deux positifs; il est clair que si on les prenoit tous deux négatifs, il n'en résulteroit aucun changement dans la valeur absolue de la formule propo-

sée; elle ne feroit que changer de signe dans le cas où l'exposant m seroit impair; et elle demeureroit absolument la même, dans le cas où l'exposant m seroit pair; ainsi il n'importe quels signes on donne aux nombres p et q, lorsqu'on les suppose tous deux de mêmes signes.

Mais il n'en sera pas de même, si on donne à p et q des signes différens; car alors les termes alternatifs de l'équation proposée changeront de signe, ce qui en fera changer aussi aux racines α, β, γ, etc. $\mu \pm \nu\sqrt{-1}$, $\pi \pm \varrho\sqrt{-1}$, etc. de sorte que celles des quantités α, β, γ, etc. μ, π, etc. qui étoient négatives, et par conséquent inutiles dans le premier cas, deviendront positives dans celui-ci, et devront être employées à la place des autres.

De-là je conclus en général que lorsqu'on recherche le *minimum* de la formule proposée sans autre restriction, sinon que p et q soient des nombres entiers, il faut prendre successivement pour a toutes les racines réelles α, β, γ, etc. et toutes les parties réelles μ, π, etc. des racines imaginaires de l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +, \text{ etc.} + V = 0,$$

en faisant abstraction des signes de ces quantités; mais ensuite il faudra donner à p et q les mêmes signes, ou des signes différens, suivant que la quantité qu'on aura prise pour a, aura eu originairement le signe positif ou le signe négatif.

REMARQUE II

30. Lorsque parmi les racines réelles α, β, γ, etc. il y en a de commensurables, alors il est clair que la quantité proposée deviendra nulle, en faisant $\frac{p}{q}$ égal à une de ces racines; de sorte que dans ce cas il n'y aura pas, à proprement parler, de *minimum*; dans tous les autres cas il sera impossible que la quantité dont il s'agit devienne zéro, tant que p et q seront des nombres entiers; or, comme les coefficiens A, B, C, etc. sont aussi des nombres entiers, (*hyp.*), cette quantité sera toujours égale à un nombre entier, et par conséquent elle ne pourra jamais être moindre que l'unité.

Donc, si on avoit à résoudre en nombres entiers l'équation

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 +, \text{ etc.} + Vq^m = \pm 1,$$

il faudroit chercher les valeurs de p et q par la méthode du probleme précédent, excepté dans les cas où l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +, \text{ etc.} + V = 0$$

auroit des racines ou des diviseurs quelconques commensurables; car alors il est visible que la quantité

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 +, \text{ etc.}$$

pourroit se décomposer en deux ou plusieurs quantités semblables de degrés moindres; de sorte qu'il faudroit que chacune de ces formules partielles fût égale à l'unité en particulier, ce qui donneroit pour le moins deux équations qui serviroient à déterminer p et q.

Nous avons déjà donné ailleurs, (Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1768[1]), une solution de ce dernier probleme; mais celle que nous venons d'indiquer est beaucoup plus simple et plus directe, quoique toutes les deux dépendent de la même théorie des fractions continues.

PROBLEME III

31. *On demande les valeurs de p et de q, qui rendront la quantité*

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2$$

la plus petite qu'il est possible, dans l'hypothese qu'on n'admette pour p et q que des nombres entiers.

Ce probleme n'est, comme l'on voit, qu'un cas particulier du précédent; mais nous avons cru devoir le traiter en particulier, parce qu'il est susceptible d'une solution très-simple et très-élégante, et que d'ailleurs nous aurons dans la suite occasion d'en faire usage dans la résolution des équations du second degré à deux inconnues, en nombres entiers.

Suivant la méthode générale il faudra donc commencer par chercher les racines de l'équation

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

lesquelles sont, comme l'on sait,

$$\frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}.$$

Or, 1°. si $B^2 - 4AC$ est égal à un nombre carré, les deux racines seront commensurables, et il n'y aura point de *minimum* proprement dit, parce que la quantité $Ap^2 + Bpq + Cq^2$ pourra devenir nulle.

1) Voir la note p. 514. H. W.

2°. Si B^2-4AC n'est pas carré, alors les deux racines seront irrationnelles ou imaginaires, suivant que B^2-4AC sera $>$ ou <0, ce qui fait deux cas qu'il faut considérer séparément; nous commencerons par le dernier, qui est le plus facile à résoudre.

Premier Cas lorsque $B^2-4AC<0$

32. Les deux racines étant dans ce cas imaginaires, on aura $\frac{-B}{2A}$ pour la partie toute réelle de ces racines, laquelle devra par conséquent être prise pour a. Ainsi il n'y aura qu'à réduire la fraction $\frac{-B}{2A}$, (en faisant abstraction du signe qu'elle peut avoir), en fraction continue par la méthode de l'art. 4, et en déduire ensuite la série des fractions convergentes, (art. 10), laquelle sera nécessairement terminée; cela fait, on essayera successivement pour p les numérateurs de ces fractions, et pour q les dénominateurs correspondans, en ayant soin de donner à p et q les mêmes signes ou des signes différens, suivant que $\frac{-B}{2A}$ sera un nombre positif ou négatif. On trouvera de cette maniere les valeurs de p et q, qui peuvent rendre la formule proposée un *moindre.*

EXEMPLE

Soit proposée, par exemple, la quantité

$$49p^2-238pq+290q^2.$$

On aura donc ici $A=49$, $B=-238$, $C=290$; donc $B^2-4AC=-196$, et $\frac{-B}{2A}=\frac{238}{98}=\frac{17}{7}$. Opérant donc sur cette fraction de la maniere enseignée dans l'art. 4, on trouvera les quotiens 2, 2, 3, à l'aide desquels on formera ces fractions, (voyez l'art. 20),

$$\begin{array}{cccc} & 2, & 2, & 3. \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{17}{7}. \end{array}$$

De sorte que les nombres à essayer seront 1, 2, 5, 17 pour p, et 0, 1, 2, 7 pour q; or désignant par P la quantité proposée, on trouvera

p	q	P
1	0	49
2	1	10
5	2	5
17	7	49;

d'où l'on voit que la plus petite valeur de P est 5, laquelle résulte de ces suppositions $p = 5$ et $q = 2$; ainsi on peut conclure en général que la formule proposée ne pourra jamais devenir plus petite que 5, tant que p et q seront des nombres entiers; de sorte que le *minimum* aura lieu, lorsque $p = 5$ et $q = 2$.

Second Cas lorsque $B^2 - 4AC > 0$

33. Comme dans le cas présent l'équation $Ax^2 + Bx + C = 0$ a deux racines réelles irrationnelles, il faudra les réduire l'une et l'autre en fractions continues. Cette opération peut se faire avec la plus grande facilité par une méthode particuliere que nous avons exposée ailleurs, et que nous croyons devoir rappeler ici, d'autant qu'elle se déduit naturellement des formules de l'article 25, et qu'elle renferme d'ailleurs tous les principes nécessaires pour la solution complette et générale du probleme proposé.

Dénotons donc par a la racine qu'on a dessein de convertir en fraction continue, et que nous supposerons toujours positive, et soit en même temps b l'autre racine, on aura, comme l'on sait, $a + b = -\frac{B}{A}$, et $ab = \frac{C}{A}$; d'où $a - b = \frac{\sqrt{(B^2 - 4AC)}}{A}$, ou bien en faisant, pour abréger,

$$B^2 - 4AC = E,$$

$a - b = \frac{\sqrt{E}}{A}$, où le radical $\sqrt{E}$ peut être positif ou négatif; il sera positif, lorsque la racine a sera la plus grande des deux, et négatif, lorsque cette racine sera la plus petite; donc

$$a = \frac{-B + \sqrt{E}}{2A}, \qquad b = \frac{-B - \sqrt{E}}{2A}.$$

Maintenant, si on conserve les mêmes dénominations de l'art. 25, il n'y aura qu'à substituer à la place de a la valeur précédente, et la difficulté ne consistera qu'à pouvoir déterminer facilement les valeurs entieres approchées μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc.

Pour faciliter ces déterminations, je multiplie le haut et le bas des fractions

$$\frac{p^0 - aq^0}{aq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}}, \quad \frac{aq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}}{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}}, \quad \frac{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}}{aq^{\mathrm{III}} - p^{\mathrm{III}}}, \text{ etc.}$$

respectivement par $A(bq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}})$, $A(p^{\mathrm{II}} - bq^{\mathrm{II}})$, $A(bq^{\mathrm{III}} - p^{\mathrm{III}})$, etc. et comme on a

$$A(p^0 - aq^0)(p^0 - bq^0) = A$$

$$A(aq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}})(bq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}) = Ap^{\mathrm{I}2} - A(a+b)p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}} + Aabq^{\mathrm{I}2} = Ap^{\mathrm{I}2} + Bp^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}} + Cq^{\mathrm{I}2},$$

$$A(p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}})(p^{\mathrm{II}} - bq^{\mathrm{II}}) = Ap^{\mathrm{II}2} - A(a+b)p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}} + Aabq^{\mathrm{II}2} = Ap^{\mathrm{II}2} + Bp^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}} + Cq^{\mathrm{II}2}, \text{ etc.}$$

$$A(p^0 - aq^0)(bq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}) = -\mu A - \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}\sqrt{E},$$

$$A(aq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}})(p^{\mathrm{II}} - bq^{\mathrm{II}}) = -Ap^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{II}} + Aap^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{I}} + Abp^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}} - Aabq^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}}$$
$$= -Ap^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{II}} - Cq^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}} - \tfrac{1}{2}B(p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}} + q^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{II}}) + \tfrac{1}{2}\sqrt{E}(p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{I}} - q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{I}}),$$

$$A(p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}})(bq^{\mathrm{III}} - p^{\mathrm{III}}) = -Ap^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}} + Aap^{\mathrm{III}}q^{\mathrm{II}} + Abp^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}} - Aabq^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}}$$
$$= -Ap^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}} - Cq^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}} - \tfrac{1}{2}B(p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}} + q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}}) + \tfrac{1}{2}\sqrt{E}(p^{\mathrm{III}}q^{\mathrm{II}} - q^{\mathrm{III}}p^{\mathrm{II}}),$$

et ainsi de suite, je fais, pour abréger,

$$\begin{aligned}
P^0 &= A \\
P^{\mathrm{I}} &= Ap^{\mathrm{I}2} + Bp^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}} + Cq^{\mathrm{I}2} \\
P^{\mathrm{II}} &= Ap^{\mathrm{II}2} + Bp^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}} + Cq^{\mathrm{II}2} \\
P^{\mathrm{III}} &= Ap^{\mathrm{III}2} + Bp^{\mathrm{III}}q^{\mathrm{III}} + Cq^{\mathrm{III}2}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^0 &= \tfrac{1}{2}B \\
Q^{\mathrm{I}} &= A\mu + \tfrac{1}{2}B \\
Q^{\mathrm{II}} &= Ap^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{II}} + \tfrac{1}{2}B(p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}} + q^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{II}}) + Cq^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}} \\
Q^{\mathrm{III}} &= Ap^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}} + \tfrac{1}{2}B(p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}} + q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}}) + Cq^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

J'aurai, à cause de

$$p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{I}} - q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{I}} = 1, \quad p^{\mathrm{III}}q^{\mathrm{II}} - q^{\mathrm{III}}p^{\mathrm{II}} = -1, \quad p^{\mathrm{IV}}q^{\mathrm{III}} - q^{\mathrm{IV}}p^{\mathrm{III}} = 1, \text{ etc.}$$

les formules suivantes,

$$\begin{aligned}
\mu &< \frac{-Q^0 + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^0} \\
\mu^{\mathrm{I}} &< \frac{-Q^{\mathrm{I}} - \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\mathrm{I}}} \\
\mu^{\mathrm{II}} &< \frac{-Q^{\mathrm{II}} + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\mathrm{II}}} \\
\mu^{\mathrm{III}} &< \frac{-Q^{\mathrm{III}} - \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\mathrm{III}}}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Or, si dans l'expression de Q^{II} on met pour p^{II} et q^{II} leurs valeurs $\mu^{\text{I}}p^{\text{I}}+1$ et μ^{I}, elle deviendra $\mu^{\text{I}}P^{\text{I}}+Q^{\text{I}}$; de même si on substitue dans l'expression de Q^{III} pour p^{III} et q^{III} leurs valeurs $\mu^{\text{II}}p^{\text{II}}+p^{\text{I}}$ et $\mu^{\text{II}}q^{\text{II}}+q^{\text{I}}$, elle se changera en $\mu^{\text{II}}P^{\text{II}}+Q^{\text{II}}$, et ainsi du reste; de sorte que l'on aura

$$\begin{aligned}
Q^{\text{I}} &= \mu P^0 + Q^0\\
Q^{\text{II}} &= \mu^{\text{I}} P^{\text{I}} + Q^{\text{I}}\\
Q^{\text{III}} &= \mu^{\text{II}} P^{\text{II}} + Q^{\text{II}}\\
Q^{\text{IV}} &= \mu^{\text{III}} P^{\text{III}} + Q^{\text{III}}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Pareillement si on substitue dans l'expression de P^{II} les valeurs de p^{II} et q^{II}, elle deviendra $\mu^{\text{I}2}P^{\text{I}}+2\mu^{\text{I}}Q^{\text{I}}+A$; et si on substitue les valeurs de p^{III} et q^{III} dans l'expression de P^{III}, elle deviendra $\mu^{\text{II}2}P^{\text{II}}+2\mu^{\text{II}}Q^{\text{II}}+P^{\text{I}}$, et ainsi de suite; de sorte que l'on aura

$$\begin{aligned}
P^{\text{I}} &= \mu^2 P^0 + 2\mu Q^0 + C\\
P^{\text{II}} &= \mu^{\text{I}2} P^{\text{I}} + 2\mu^{\text{I}} Q^{\text{I}} + P^0\\
P^{\text{III}} &= \mu^{\text{II}2} P^{\text{II}} + 2\mu^{\text{II}} Q^{\text{II}} + P^{\text{I}}\\
P^{\text{IV}} &= \mu^{\text{III}2} P^{\text{III}} + 2\mu^{\text{III}} Q^{\text{III}} + P^{\text{II}}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Ainsi on pourra, à l'aide de ces formules, continuer aussi loin qu'on voudra les suites des nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc., Q^0, Q^{I}, Q^{II}, etc. et P^0, P^{I}, P^{II}, etc. qui dépendent, comme l'on voit, mutuellement les uns des autres, sans qu'il soit nécessaire de calculer en même temps les nombres p^0, p^{I}, p^{II}, etc. et q^0, q^{I}, q^{II}, etc.

On peut encore trouver les valeurs de P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. par des formules plus simples que les précédentes, en remarquant que l'on a

$$Q^{\text{I}2}-AP^{\text{I}}=(\mu A+\tfrac{1}{2}B)^2-A(\mu^2A+\mu B+C)=\tfrac{1}{4}B^2-AC,$$
$$Q^{\text{II}2}-P^{\text{I}}P^{\text{II}}=(\mu^{\text{I}}P^{\text{I}}+Q^{\text{I}})^2-P^{\text{I}}(\mu^{\text{I}2}P^{\text{I}}+2\mu^{\text{I}}Q^{\text{I}}+A)=Q^{\text{I}2}-AP^{\text{I}},$$

et ainsi de suite; c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
Q^{\text{I}2} - P^0 P^{\text{I}} &= \tfrac{1}{4}E\\
Q^{\text{II}2} - P^{\text{I}} P^{\text{II}} &= \tfrac{1}{4}E\\
Q^{\text{III}2} - P^{\text{II}} P^{\text{III}} &= \tfrac{1}{4}E, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$P^{\text{I}} = \frac{Q^{\text{I}2} - \frac{1}{4}E}{P^0}$$

$$P^{\text{II}} = \frac{Q^{\text{II}2} - \frac{1}{4}E}{P^{\text{I}}}$$

$$P^{\text{III}} = \frac{Q^{\text{III}2} - \frac{1}{4}E}{P^{\text{II}}}, \text{ etc.}$$

Les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. étant donc trouvés ainsi, on aura, (art. 26), la fraction continue

$$a = \mu + \frac{1}{\mu^{\text{I}}} + \frac{1}{\mu^{\text{II}}} +, \text{ etc.}$$

et pour trouver le *minimum* de la formule $Ap^2 + Bpq + Cq^2$, il n'y aura qu'à calculer les nombres $p^0, p^{\text{I}}, p^{\text{II}}, p^{\text{III}}$, etc. et $q^0, q^{\text{I}}, q^{\text{II}}, q^{\text{III}}$, etc. (art. 25), et les essayer ensuite à la place de p et q; mais on peut encore se dispenser de cette opération, en remarquant que les quantités P^0, P^{I}, P^{II}, etc. ne sont autre chose que les valeurs de la formule dont il s'agit, lorsqu'on y fait successivement $p = p^0, p^{\text{I}}, p^{\text{II}}$, etc. et $q = q^0, q^{\text{I}}, q^{\text{II}}$, etc. Ainsi il n'y aura qu'à voir quel est le plus petit terme de la suite P^0, P^{I}, P^{II}, etc. qu'on aura calculée en même temps que la suite μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. et ce sera le *minimum* cherché; on trouvera ensuite les valeurs correspondantes de p et q par les formules citées.

34. Maintenant je dis qu'en continuant la série P^0, P^{I}, P^{II}, etc. on doit nécessairement parvenir à deux termes consécutifs de signes différens, et qu'alors tous les termes suivans seront aussi deux à deux de différens signes. Car on a, (art. précédent),

$$P^0 = A(p^0 - aq^0)(p^0 - bq^0), \quad P^{\text{I}} = A(p^{\text{I}} - aq^{\text{I}})(p^{\text{I}} - bq^{\text{I}}), \text{ etc.}$$

or de ce qu'on a démontré dans le probleme I, il s'ensuit que les quantités $p^0 - aq^0$, $p^{\text{I}} - aq^{\text{I}}$, $p^{\text{II}} - aq^{\text{II}}$, etc. doivent être de signes alternatifs, et aller toujours en diminuant; donc, 1°. si b est une quantité négative, les quantités $p^0 - bq^0$, $p^{\text{I}} - bq^{\text{I}}$, etc. seront toutes positives; par conséquent les nombres P^0, P^{I}, P^{II}, etc. seront tous de signes alternatifs; 2°. si b est une quantité positive, comme les quantités $p^{\text{I}} - aq^{\text{I}}$, $p^{\text{II}} - aq^{\text{II}}$, etc. et à plus forte raison les quantités $\frac{p^{\text{I}}}{q^{\text{I}}} - a$, $\frac{p^{\text{II}}}{q^{\text{II}}} - a$, etc. forment une suite décroissante à l'infini, on arrivera nécessairement à une de ces dernieres quantités, comme $\frac{p^{\text{III}}}{q^{\text{III}}} - a$, qui sera

$< a - b$, (abstraction faite du signe), et alors toutes les suivantes, $\frac{p^{\text{IV}}}{q^{\text{IV}}} - a$, $\frac{p^{\text{V}}}{q^{\text{V}}} - a$, etc. le seront aussi; de sorte que toutes les quantités $a - b + \frac{p^{\text{III}}}{q^{\text{III}}} - a$, $a - b + \frac{p^{\text{IV}}}{q^{\text{IV}}} - a$, etc. seront nécessairement de même signe que la quantité $a - b$; par conséquent les quantités $\frac{p^{\text{III}}}{q^{\text{III}}} - b$, $\frac{p^{\text{IV}}}{q^{\text{IV}}} - b$, etc. et celles-ci, $p^{\text{III}} - bq^{\text{III}}$, $p^{\text{IV}} - bq^{\text{IV}}$, etc. à l'infini, seront toutes de même signe; donc les nombres P^{III}, P^{IV}, etc. seront tous de signes alternatifs.

Supposons donc en général que l'on soit parvenu à des termes de signes alternatifs dans la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. et que P^{λ} soit le premier de ces termes, en sorte que tous les termes, P^{λ}, $P^{\lambda+1}$, $P^{\lambda+2}$, etc. à l'infini, soient alternativement positifs et négatifs, je dis qu'aucun de ces termes ne pourra être plus grand que $\frac{1}{4}E$[1]. Car si, par exemple, P^{III}, P^{IV}, P^{V}, etc. sont tous de signes alternatifs, il est clair que les produits deux à deux, $P^{\text{III}}P^{\text{IV}}$, $P^{\text{IV}}P^{\text{V}}$, etc. seront nécessairement tous négatifs; mais on a, (art. précédent),

$$Q^{\text{IV}2} - P^{\text{III}}P^{\text{IV}} = \frac{1}{4}E, \quad Q^{\text{V}2} - P^{\text{IV}}P^{\text{V}} = \frac{1}{4}E, \text{ etc.}$$

donc les nombres positifs, $-P^{\text{III}}P^{\text{IV}}$, $-P^{\text{IV}}P^{\text{V}}$, etc., seront tous moindres que $\frac{1}{4}E$, ou au moins pas plus grands que $\frac{1}{4}E$; de sorte que, comme les nombres P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. sont d'ailleurs tous entiers par leur nature, les nombres P^{III}, P^{IV}, etc. et en général les nombres P^{λ}, $P^{\lambda+1}$, etc. (abstraction faite de leurs signes), ne pourront jamais surpasser le nombre $\frac{1}{4}E$.

Il s'ensuit aussi de-là que les termes Q^{IV}, Q^{V}, etc. et en général $Q^{\lambda+1}$, $Q^{\lambda+2}$, etc. ne pourront jamais être plus grands que $\frac{1}{2}\sqrt{E}$.

D'où il est facile de conclure que les deux séries P^{λ}, $P^{\lambda+1}$, $P^{\lambda+2}$, etc. et $Q^{\lambda+1}$, $Q^{\lambda+2}$, etc. quoique poussées à l'infini, ne pourront être composées que d'un certain nombre de termes différens, ces termes ne pouvant être pour la premiere que les nombres naturels jusqu'à $\frac{1}{4}E$ pris positivement ou négativement, et pour la seconde, les nombres naturels jusqu'à $\frac{1}{2}\sqrt{E}$ avec les fractions intermédiaires $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, etc. pris aussi positivement ou négativement; car il est visible par les formules de l'article précédent que les nombres Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, etc. seront toujours entiers, lorsque B sera pair, mais qu'ils contiendront chacun la fraction $\frac{1}{2}$, lorsque B sera impair.

Donc, en continuant les deux séries P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. et Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, etc.

---

1) Dans l'édition originale, E n'a le coefficient $\frac{1}{4}$ ni ici ni aux passages suivants. H. W.

il arrivera nécessairement que deux termes correspondans, comme P^π et Q^π, reviendront après un certain intervalle de termes, dont le nombre pourra toujours être supposé pair, car, comme il faut que les mêmes termes P^π et Q^π reviennent en même temps une infinité de fois, à cause que le nombre des termes différens dans l'une et dans l'autre série est limité, et par conséquent aussi le nombre de leurs combinaisons différentes, il est clair que si ces deux termes revenoient toujours après un intervalle d'un nombre impair de termes, il n'y auroit qu'à considérer leurs retours alternativement, et alors les intervalles seroient tous composés d'un nombre pair de termes.

On aura donc, en dénotant par 2ϱ le nombre des termes intermédiaires,

$$P^{\pi+2\varrho} = P^\pi, \quad \text{et} \quad Q^{\pi+2\varrho} = Q^\pi,$$

et alors tous les termes P^π, $P^{\pi+1}$, $P^{\pi+2}$, etc. Q^π, $Q^{\pi+1}$, $Q^{\pi+2}$, etc. et μ^π, $\mu^{\pi+1}$, $\mu^{\pi+2}$, etc. reviendront aussi au bout de chaque intervalle de 2ϱ termes. Car il est facile de voir par les formules données dans l'article précédent pour la détermination des nombres μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc. Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, etc. et P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. que dès qu'on aura

$$P^{\pi+2\varrho} = P^\pi, \quad \text{et} \quad Q^{\pi+2\varrho} = Q^\pi,$$

on aura aussi $\mu^{\pi+2\varrho} = \mu^\pi$, ensuite

$$Q^{\pi+2\varrho+1} = Q^{\pi+1}, \quad \text{et} \quad P^{\pi+2\varrho+1} = P^{\pi+1};$$

donc aussi $\mu^{\pi+2\varrho+1} = \mu^{\pi+2\varrho}$, et ainsi de suite.

Donc, si Π est un nombre quelconque égal ou plus grand que π, et que m dénote un nombre quelconque entier positif, on aura en général

$$P^{\Pi+2m\varrho} = P^{\Pi}, \quad Q^{\Pi+2m\varrho} = Q^{\Pi}, \quad \mu^{\Pi+2m\varrho} = \mu^{\Pi};$$

de sorte qu'en connoissant les $\pi + 2\varrho$ premiers termes de chacune de ces trois suites, on connoîtra aussi tous les suivans, qui ne seront autre chose que les 2ϱ derniers termes répétés à l'infini dans le même ordre.

De tout cela il s'ensuit que pour trouver la plus petite valeur de

$$P = Ap^2 + Bpq + Cq^2,$$

il suffit de pousser les séries P^0, P^{I}, P^{II}, etc. et Q^0, Q^{I}, Q^{II}, etc. jusqu'à ce que deux termes correspondans, comme P^π et Q^π, reparoissent ensemble après un nombre pair de termes intermédiaires, en sorte que l'on ait

$$P^{\pi+2\varrho} = P^{\pi}, \text{ et } Q^{\pi+2\varrho} = Q^{\pi};$$

alors le plus petit terme de la série P^0, P^{I}, P^{II}, etc. $P^{\pi+2\varrho}$ sera le *minimum* cherché.

COROLLAIRE I

35. Si le plus petit terme de la série P^0, P^{I}, P^{II}, etc. $P^{\pi+2\varrho}$ ne se trouve pas avant le terme P^{π}, alors ce terme reparoîtra une infinité de fois dans la même suite prolongée à l'infini; ainsi il y aura alors une infinité de valeurs de p et de q qui répondront au *minimum*, et qu'on pourra trouver toutes par les formules de l'art. 25, en continuant la série des nombres μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc. au-delà du terme $\mu^{\pi+2\varrho}$ par la répétition des mêmes termes $\mu^{\pi+1}$, $\mu^{\pi+2}$, etc. comme on l'a dit plus haut.

On peut aussi dans ce cas avoir des formules générales qui représentent toutes les valeurs de p et de q dont il s'agit; mais le détail de la méthode qu'il faut employer pour y parvenir, nous meneroit trop loin; quant à présent, nous nous contenterons de renvoyer pour cet objet aux Mémoires de Berlin déjà cités, année 1768, p. 123 et suivantes[1]) où l'on trouvera une théorie générale et nouvelle des fractions continues périodiques.

COROLLAIRE II

36. Nous avons démontré dans l'art. 34, qu'en continuant la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. on doit trouver des termes consécutifs de signes différens. Supposons donc, par exemple, que P^{III} et P^{IV} soient les deux premiers termes de cette qualité, on aura nécessairement les deux quantités $p^{\mathrm{III}} - bq^{\mathrm{III}}$ et $p^{\mathrm{IV}} - bq^{\mathrm{IV}}$ de mêmes signes, à cause que les quantités $p^{\mathrm{III}} - aq^{\mathrm{III}}$ et $p^{\mathrm{IV}} - aq^{\mathrm{IV}}$ sont de leur nature de différens signes. Or en mettant dans les quantités $p^{\mathrm{V}} - bq^{\mathrm{V}}$, $p^{\mathrm{VI}} - bq^{\mathrm{VI}}$, etc. les valeurs de p^{V}, p^{VI}, etc. q^{V}, q^{VI}, etc. (art. 25), on aura

$$p^{\mathrm{V}} - bq^{\mathrm{V}} = \mu^{\mathrm{IV}}(p^{\mathrm{IV}} - bq^{\mathrm{IV}}) + p^{\mathrm{III}} - bq^{\mathrm{III}}$$
$$p^{\mathrm{VI}} - bq^{\mathrm{VI}} = \mu^{\mathrm{V}}(p^{\mathrm{V}} - bq^{\mathrm{V}}) + p^{\mathrm{IV}} - bq^{\mathrm{IV}}, \text{ etc.}$$

D'où, à cause que μ^{IV}, μ^{V}, etc. sont des nombres positifs, il est clair que

1) Voir la note p. 514. H. W.

toutes les quantités $p^{\mathrm{v}}-bq^{\mathrm{v}}$, $p^{\mathrm{vi}}-bq^{\mathrm{vi}}$, etc. à l'infini, seront de mêmes signes que les quantités $p^{\mathrm{III}}-bq^{\mathrm{III}}$ et $p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}$; par conséquent tous les termes P^{III}, P^{IV}, P^{V}, etc. à l'infini, auront alternativement les signes *plus* et *moins.*

Maintenant on aura par les équations précédentes

$$\mu^{\mathrm{IV}}=\frac{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}-\frac{p^{\mathrm{III}}-bq^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}$$

$$\mu^{\mathrm{V}}=\frac{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}-\frac{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}$$

$$\mu^{\mathrm{VI}}=\frac{p^{\mathrm{VII}}-bq^{\mathrm{VII}}}{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}-\frac{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}},\ \text{etc.}$$

où les quantités $\frac{p^{\mathrm{III}}-bq^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}$, $\frac{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}$, etc. seront toutes positives.

Donc, puisque les nombres μ^{IV}, μ^{V}, μ^{VI}, etc. doivent être tous entiers positifs, (*hyp.*), la quantité $\frac{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}$ devra être positive et >1, de même que les quantités $\frac{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}$, $\frac{p^{\mathrm{VII}}-bq^{\mathrm{VII}}}{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}$, etc.; donc les quantités $\frac{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}$, $\frac{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}$, etc. seront positives et moindres que l'unité; de sorte que les nombres μ^{V}, μ^{VI}, etc. ne pourront être que les nombres entiers, qui sont immédiatement moindres que les valeurs de $\frac{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}$, $\frac{p^{\mathrm{VII}}-bq^{\mathrm{VII}}}{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}$, etc.; quant au nombre μ^{IV}, il sera aussi égal au nombre entier, qui est immédiatement moindre que la valeur de $\frac{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}$, toutes les fois qu'on aura $\frac{p^{\mathrm{III}}-bq^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}<1$. Ainsi on aura

$$\mu^{\mathrm{IV}}<\frac{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}},\quad \text{si } \frac{p^{\mathrm{III}}-bq^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}<1,$$

$$\mu^{\mathrm{V}}<\frac{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}},$$

$$\mu^{\mathrm{VI}}<\frac{p^{\mathrm{VII}}-bq^{\mathrm{VII}}}{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}},\ \text{etc.}$$

le signe $<$ placé après les nombres μ^{IV}, μ^{V}, μ^{VI}, etc. dénotant, comme plus haut, les nombres entiers qui sont immédiatement au-dessous des quantités qui suivent ce même signe.

Or il est facile de transformer, par des réductions semblables à celles de l'art. 33, les quantités $\frac{p^{\text{V}}-bq^{\text{V}}}{p^{\text{IV}}-bq^{\text{IV}}}$, $\frac{p^{\text{VI}}-bq^{\text{VI}}}{p^{\text{V}}-bq^{\text{V}}}$, etc. en celles-ci,

$$\frac{Q^{\text{V}}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\text{IV}}},\quad \frac{Q^{\text{VI}}-\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\text{V}}},\ \text{etc.};$$

de plus la condition de $\frac{p^{\text{III}}-bq^{\text{III}}}{p^{\text{IV}}-bq^{\text{IV}}}<1$ peut se réduire à celle-ci

$$\frac{-P^{\text{III}}}{P^{\text{IV}}}<\frac{aq^{\text{III}}-p^{\text{III}}}{p^{\text{IV}}-aq^{\text{IV}}};$$

laquelle, à cause de $\frac{aq^{\text{III}}-p^{\text{III}}}{p^{\text{IV}}-aq^{\text{IV}}}>1$, aura sûrement lieu lorsqu'on aura $\frac{-P^{\text{III}}}{P^{\text{IV}}}=$ ou <1; donc on aura

$$\mu^{\text{IV}}<\frac{Q^{\text{V}}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\text{IV}}},\quad \text{si } \frac{-P^{\text{III}}}{P^{\text{IV}}}=\text{ ou }<1,$$
$$\mu^{\text{V}}<\frac{Q^{\text{VI}}-\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\text{V}}},$$
$$\mu^{\text{VI}}<\frac{Q^{\text{VII}}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\text{VI}}},\ \text{etc.}$$

En combinant ces formules avec celles de l'art. 33, qui renferment la loi des séries P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. et Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, etc. on verra aisément que si on suppose donnés deux termes correspondans de ces deux séries, dont le numéro soit plus grand que 3, on pourra remonter aux termes précédens jusqu'à P^{IV} et Q^{V}, et même jusqu'aux termes P^{III} et Q^{IV}, si la condition de $\frac{-P^{\text{III}}}{P^{\text{IV}}}=$ ou <1 a lieu; en sorte que tous ces termes seront absolument déterminés par ceux qu'on a supposé donnés.

En effet connoissant, par exemple, P^{VI} et Q^{VI}, on connoîtra d'abord P^{V} par l'équation

$$Q^{\text{VI}2}-P^{\text{V}}P^{\text{VI}}=\frac{1}{4}E;$$

ensuite ayant Q^{VI} et P^{V}, on trouvera la valeur de μ^{V}, à l'aide de laquelle on trouvera ensuite la valeur de Q^{V} par l'équation

$$Q^{\text{VI}}=\mu^{\text{V}}P^{\text{V}}+Q^{\text{V}};$$

or l'équation

$$Q^{\mathrm{V}2} - P^{\mathrm{IV}} P^{\mathrm{V}} = \frac{1}{4} E$$

donnera P^{IV}; et si on sait d'avance que $\frac{-P^{\mathrm{III}}}{P^{\mathrm{IV}}}$ doit être $=$ ou < 1, on trouvera μ^{IV}, après quoi on aura Q^{IV} par l'équation

$$Q^{\mathrm{V}} = \mu^{\mathrm{IV}} P^{\mathrm{IV}} + Q^{\mathrm{IV}},$$

et ensuite P^{III} par celle-ci,

$$Q^{\mathrm{IV}2} - P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{4} E.$$

De-là il est facile de tirer cette conclusion générale, que si P^{λ} et $P^{\lambda+1}$ sont les premiers termes de la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. qui se trouvent consécutivement de différens signes, le terme $P^{\lambda+1}$ et les suivans reviendront toujours après un certain nombre de termes intermédiaires, et qu'il en sera de même du terme P^{λ}, si l'on a $\frac{\pm P^{\lambda}}{P^{\lambda+1}} =$ ou < 1.

Car imaginons, comme dans l'art. 34, que l'on ait trouvé $P^{\pi+2\varrho} = P^{\pi}$, et $Q^{\pi+2\varrho} = Q^{\pi}$, et supposons que π soit $> \lambda$, c'est-à-dire $\pi = \lambda + \nu$; donc on pourra d'un côté remonter du terme P^{π} au terme $P^{\lambda+1}$ ou P^{λ}, et de l'autre, du terme $P^{\pi+2\varrho}$ au terme $P^{\lambda+2\varrho+1}$ ou $P^{\lambda+2\varrho}$; et comme les termes d'où l'on part, de part et d'autre sont égaux, tous les dérivés seront aussi respectivement égaux; de sorte qu'on aura $P^{\lambda+2\varrho+1} = P^{\lambda+1}$, ou même $P^{\lambda+2\varrho} = P^{\lambda}$, si $\frac{\pm P^{\lambda}}{P^{\lambda+1}} =$ ou < 1.

Par-là on pourra donc juger d'avance du commencement des périodes dans la série P^{0}, P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. et par conséquent aussi dans les deux autres séries, Q^{0}, Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, etc. et μ, μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc.; mais quant à la longueur des périodes, cela dépend de la nature du nombre E, et même uniquement de la valeur de ce nombre, comme je pourrois le démontrer, si je ne craignois que ce détail ne me menât trop loin.

COROLLAIRE III

37. Ce qu'on vient de démontrer dans le corollaire précédent peut servir encore à prouver ce beau théoreme:

Que toute équation de la forme $p^2 - Kq^2 = 1$, où K est un nombre entier positif non carré, et p et q deux indéterminées, est toujours résoluble en nombres entiers.

Car, en comparant la formule $p^2 - Kq^2$ avec la formule générale $Ap^2 + Bpq + Cq^2$, on a $A = 1$, $B = 0$, $C = -K$; donc, (art. 33),

$$E = B^2 - 4AC = 4K, \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{E} = \sqrt{K}.$$

Donc $P^0 = 1$, $Q^0 = 0$; donc $\mu < \sqrt{K}$, $Q^{\rm I} = \mu$, et $P^{\rm I} = \mu^2 - K$; d'où l'on voit 1°. que $P^{\rm I}$ est négatif, et par conséquent de signe différent de P^0; 2°. que $-P^{\rm I}$ est $=$ ou > 1, parce que K et μ sont des nombres entiers; de sorte qu'on aura $\frac{P^0}{-P^{\rm I}} =$ ou < 1; donc on aura, (art. précédent), $\lambda = 0$ et $P^{2\varrho} = P^0 = 1$; de sorte qu'en continuant la série P^0, $P^{\rm I}$, $P^{\rm II}$, etc. le terme $P^0 = 1$ reviendra nécessairement après un certain intervalle de termes; par conséquent on pourra toujours trouver une infinité de valeurs de p et de q qui rendent la formule $p^2 - Kq^2$ égale à l'unité.

COROLLAIRE IV

38. On peut aussi démontrer cet autre théoreme:

Que si l'équation $p^2 - Kq^2 = \pm H$ est résoluble en nombres entiers, en supposant K un nombre positif non-carré, et H un nombre positif et moindre que $\sqrt{K}$, les nombres p et q doivent être tels que $\frac{p}{q}$ soit une des fractions principales convergentes vers la valeur de $\sqrt{K}$.

Supposons que le signe supérieur doive avoir lieu, en sorte que

$$p^2 - Kq^2 = H;$$

donc on aura

$$p - q\sqrt{K} = \frac{H}{p + q\sqrt{K}} \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} - \sqrt{K} = \frac{H}{q^2\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)};$$

qu'on cherche deux nombres entiers positifs, r et s, moindres que p et q, et tels que $ps - qr = 1$, ce qui est toujours possible, comme on l'a démontré dans l'art. 23, et l'on aura $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{1}{qs}$; donc retranchant cette équation de la précédente, il viendra

$$\frac{r}{s} - \sqrt{K} = \frac{H}{q^2\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)} - \frac{1}{qs};$$

de sorte qu'on aura

$$p - q\sqrt{K} = \frac{H}{q\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)}$$

$$r - s\sqrt{K} = \frac{1}{q}\left(\frac{sH}{q\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)} - 1\right).$$

Or, comme $\frac{p}{q} > \sqrt{K}$ et $H < \sqrt{K}$, il est clair que $\frac{H}{\frac{p}{q} + \sqrt{K}}$ sera $< \frac{1}{2}$; donc $p - q\sqrt{K}$ sera $< \frac{1}{2q}$; donc $\frac{sH}{q\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)}$ sera à plus forte raison $< \frac{1}{2}$, puisque $s < q$; de sorte que $r - s\sqrt{K}$ sera une quantité négative, laquelle, prise positivement, sera $> \frac{1}{2q}$, à cause de $1 - \frac{sH}{q\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)} > \frac{1}{2}$.

Ainsi on aura les deux quantités $p - q\sqrt{K}$ et $r - s\sqrt{K}$, ou bien, en faisant $a = \sqrt{K}$, $p - aq$ et $r - as$, lesquelles seront assujetties aux mêmes conditions que nous avons supposées dans l'art. 24, et d'où l'on tirera des conclusions semblables; donc, etc. (art. 26).

Si l'on avoit

$$p^2 - Kq^2 = -H,$$

alors il faudroit chercher les nombres r et s, tels que $ps - qr = -1$, et l'on auroit ces deux équations

$$q\sqrt{K} - p = \frac{H}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)}$$

$$s\sqrt{K} - r = \frac{1}{q}\left(\frac{sH}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)} - 1\right).$$

Comme $H < \sqrt{K}$ et $s < q$, il est clair que $\frac{sH}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)}$ sera < 1; de sorte que la quantité $s\sqrt{K} - r$ sera négative; or je dis que cette quantité, prise positivement, sera plus grande que $q\sqrt{K} - p$; pour cela il faut démontrer que

$$\frac{1}{q}\left(1 - \frac{sH}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)}\right) > \frac{H}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)}, \text{ ou bien que } 1 > \frac{H\left(1 + \frac{s}{q}\right)}{\sqrt{K} + \frac{p}{q}},$$

savoir $\sqrt{K} + \frac{p}{q} > H + \frac{sH}{q}$; mais $H < \sqrt{K}$, (*hyp.*); donc il suffit de prouver que $\frac{p}{q} > \frac{s\sqrt{K}}{q}$, ou bien que $p > s\sqrt{K}$; c'est ce qui est évident, à cause que la quantité $s\sqrt{K}-r$ étant négative, il faut que $r > s\sqrt{K}$, et à plus forte raison $p > s\sqrt{K}$, puisque $p > r$.

Ainsi les deux quantités, $p-q\sqrt{K}$ et $r-s\sqrt{K}$, seront de différens signes, et la seconde sera plus grande que la premiere, (abstraction faite des signes), comme dans le cas précédent; donc, etc.

Donc, lorsqu'on aura à résoudre en nombres entiers une équation de la forme

$$p^2-Kq^2=\pm H,$$

ou $H < \sqrt{K}$, il n'y aura qu'à suivre les mêmes procédés de l'art. 33, en faisant $A=1$, $B=0$ et $C=-K$; et si dans la série P^0, P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. $P^{\pi+2\varrho}$, on rencontre un terme $=\pm H$, on aura la résolution cherchée; sinon on sera assuré que l'équation proposée n'admet absolument aucune solution en nombres entiers.

REMARQUE

39. Nous n'avons considéré dans l'art. 33 qu'une des racines de l'équation $Ax^2+Bx+C=0$, que nous avons supposée positive; si cette équation a ses deux racines positives, il faudra les prendre successivement pour a, et faire la même opération sur l'une que sur l'autre; mais si l'une des deux racines ou toutes deux étoient négatives, alors on les changeroit d'abord en positives, en changeant seulement le signe de B, et on opéreroit comme ci-dessus; mais ensuite il faudroit prendre les valeurs de p et de q avec des signes différens, c'est-à-dire l'une positivement et l'autre négativement, (art. 29).

Donc en général on donnera à la valeur de B le signe ambigu $\pm$, de même qu'à $\sqrt{E}$, c'est-à-dire qu'on fera $Q^0=\mp\frac{1}{2}B$, et qu'on mettra $\pm$ à la place de $\sqrt{E}$, et il faudra prendre ces signes, en sorte que la racine

$$a=\frac{\mp\frac{1}{2}B\pm\frac{1}{2}\sqrt{E}}{A}$$

soit positive, ce qui pourra toujours se faire de deux manieres différentes; le signe supérieur de B indiquera une racine positive, auquel cas il faudra prendre p et q tous deux de mêmes signes; au contraire le signe inférieur de B indiquera une racine négative, auquel cas les valeurs de p et q devront être prises de signes différens.

EXEMPLE

40. *On demande quels nombres entiers il faudroit prendre pour* p *et* q, *afin que la quantité*

$$9p^2-118pq+378q^2$$

devînt la plus petite qu'il est possible.

Comparant cette quantité avec la formule générale du probleme III, on aura $A=9$, $B=-118$, $C=378$, donc $B^2-4AC=316$; d'où l'on voit que ce cas se rapporte à celui de l'art. 33. On fera donc $E=316$ et $\frac{1}{2}\sqrt{E}=\sqrt{79}$, où l'on remarquera d'abord que $\sqrt{79}>8$ et <9; de sorte que dans les formules dont il ne s'agira que d'avoir la valeur entiere approchée, on pourra prendre sur le champ à la place du radical $\sqrt{79}$ le nombre 8 ou 9, suivant que ce radical se trouvera ajouté ou retranché des autres nombres de la même formule.

Maintenant on donnera tant à B qu'à $\sqrt{E}$ le signe ambigu ± 1, et on prendra ensuite ces signes tels que

$$a=\frac{\pm 59 \pm \sqrt{79}}{9}$$

soit une quantité positive, (art. 39); d'où l'on voit qu'il faut toujours prendre le signe supérieur pour le nombre 59, et que pour le radical $\sqrt{79}$ on peut prendre également le supérieur et l'inférieur. Ainsi on fera toujours $Q^0=-\frac{1}{2}B$, et $\sqrt{E}$ pourra être pris successivement en plus et en moins.

Soit donc 1°. $\frac{1}{2}\sqrt{E}=\sqrt{79}$ avec le signe positif, on fera, (art. 33), le calcul suivant:

$$\begin{array}{lll}
Q^0 = -59, & P^0 = 9, & \mu < \frac{59+\sqrt{79}}{9} = 7, \\
Q^{\text{I}} = 9\cdot 7-59=4, & P^{\text{I}} = \frac{16-79}{9} = -7, & \mu^{\text{I}} < \frac{-4-\sqrt{79}}{-7} = 1, \\
Q^{\text{II}} = -7\cdot 1+4=-3, & P^{\text{II}} = \frac{9-79}{-7} = 10, & \mu^{\text{II}} < \frac{3+\sqrt{79}}{10} = 1, \\
Q^{\text{III}} = 10\cdot 1-3=7, & P^{\text{III}} = \frac{49-79}{10} = -3, & \mu^{\text{III}} < \frac{-7-\sqrt{79}}{-3} = 5, \\
Q^{\text{IV}} = -3\cdot 5+7=-8, & P^{\text{IV}} = \frac{64-79}{-3} = 5, & \mu^{\text{IV}} < \frac{8+\sqrt{79}}{5} = 3, \\
Q^{\text{V}} = 5\cdot 3-8=7, & P^{\text{V}} = \frac{49-79}{5} = -6, & \mu^{\text{V}} < \frac{-7-\sqrt{79}}{-6} = 2, \\
Q^{\text{VI}} = -6\cdot 2+7=-5, & P^{\text{VI}} = \frac{25-79}{-6} = 9, & \mu^{\text{VI}} < \frac{5+\sqrt{79}}{9} = 1, \\
Q^{\text{VII}} = 9\cdot 1-5=4, & P^{\text{VII}} = \frac{16-79}{9} = -7, & \mu^{\text{VII}} < \frac{-4-\sqrt{79}}{-7} = 1, \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Je m'arrête ici, parce que je vois que $Q^{\text{VII}}=Q^{\text{I}}$, et $P^{\text{VII}}=P^{\text{I}}$, et que la différence entre les deux numéros 1 et 7 est paire; d'où il s'ensuit que tous les termes suivans seront aussi les mêmes que les précédens; ainsi on aura $Q^{\text{VII}}=4$, $Q^{\text{VIII}}=-3$, $Q^{\text{IX}}=7$, etc. $P^{\text{VII}}=-7$, $P^{\text{VIII}}=10$, etc. de sorte qu'on pourra, si l'on veut, continuer les séries ci-dessus à l'infini, en ne faisant que répéter les mêmes termes.

2°. Prenons maintenant le radical $\sqrt{79}$ avec un signe négatif, et le calcul sera comme il suit:

$$
\begin{array}{lll}
Q^0 = -59, & P^0 = 9, & \mu < \frac{59-\sqrt{79}}{9} = 5, \\
Q^{\text{I}} = 9\cdot 5 - 59 = -14, & P^{\text{I}} = \frac{196-79}{9} = 13, & \mu^{\text{I}} < \frac{14+\sqrt{79}}{13} = 1, \\
Q^{\text{II}} = 13\cdot 1 - 14 = -1, & P^{\text{II}} = \frac{1-79}{13} = -6, & \mu^{\text{II}} < \frac{1-\sqrt{79}}{-6} = 1, \\
Q^{\text{III}} = -6\cdot 1 - 1 = -7, & P^{\text{III}} = \frac{49-79}{-6} = 5, & \mu^{\text{III}} < \frac{7+\sqrt{79}}{5} = 3, \\
Q^{\text{IV}} = 5\cdot 3 - 7 = 8, & P^{\text{IV}} = \frac{64-79}{5} = -3, & \mu^{\text{IV}} < \frac{-8-\sqrt{79}}{-3} = 5, \\
Q^{\text{V}} = -3\cdot 5 + 8 = -7, & P^{\text{V}} = \frac{49-79}{-3} = 10, & \mu^{\text{V}} < \frac{7+\sqrt{79}}{10} = 1, \\
Q^{\text{VI}} = 10\cdot 1 - 7 = 3, & P^{\text{VI}} = \frac{9-79}{10} = -7, & \mu^{\text{VI}} < \frac{-3-\sqrt{79}}{-7} = 1, \\
Q^{\text{VII}} = -7\cdot 1 + 3 = -4, & P^{\text{VII}} = \frac{16-79}{-7} = 9, & \mu^{\text{VII}} < \frac{4+\sqrt{79}}{9} = 1, \\
Q^{\text{VIII}} = 9\cdot 1 - 4 = 5, & P^{\text{VIII}} = \frac{25-79}{9} = -6, & \mu^{\text{VIII}} < \frac{-5-\sqrt{79}}{-6} = 2, \\
Q^{\text{IX}} = -6\cdot 2 + 5 = -7, & P^{\text{IX}} = \frac{49-79}{-6} = 5, & \mu^{\text{IX}} < \frac{7+\sqrt{79}}{5} = 3, \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

On peut s'arrêter ici, puisque l'on a trouvé $Q^{\text{IX}}=Q^{\text{III}}$ et $P^{\text{IX}}=P^{\text{III}}$, et que la différence des numéros 9 et 3 est paire; car en continuant les séries on ne retrouveroit plus que les mêmes termes qu'on a déjà trouvés.

Or, si on considere les valeurs des termes P^0, P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. trouvées dans les deux cas, on verra que le plus petit de ces termes est égal à -3; dans le premier cas, c'est le terme P^{III} auquel répondent les valeurs p^{III} et q^{III}; et dans le second cas, c'est le terme P^{IV} auquel répondent les valeurs p^{IV} et q^{IV}.

D'où il s'ensuit que la plus petite valeur que puisse recevoir la quantité proposée est -3; et pour avoir les valeurs de p et q qui y répondent, on prendra dans le premier cas les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, savoir 7, 1 et 1, et l'on en formera les fractions *principales* convergentes $\frac{7}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{15}{2}$; la troisieme fraction sera donc $\frac{p^{\text{III}}}{q^{\text{III}}}$, en sorte que l'on aura $p^{\text{III}}=15$ et $q^{\text{III}}=2$; c'est-à-dire que les valeurs cherchées seront $p=15$ et $q=2$. Dans le second cas on prendra les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, savoir 5, 1, 1, 3, lesquels donneront ces fractions $\frac{5}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{39}{7}$; de sorte qu'on aura $p^{\text{IV}}=39$ et $q^{\text{IV}}=7$; donc $p=39$ et $q=7$.

Les valeurs qu'on vient de trouver pour p et q dans le cas du *minimum*, sont aussi les plus petites qu'il est possible; mais on pourra, si l'on veut, en trouver successivement d'autres plus grandes; car il est clair que le même terme -3 reviendra toujours au bout de chaque intervalle de six termes; de sorte que dans le premier cas on aura $P^{\text{III}}=-3$, $P^{\text{IX}}=-3$, $P^{\text{XV}}=-3$, etc. et dans le second, $P^{\text{IV}}=-3$, $P^{\text{X}}=-3$, $P^{\text{XVI}}=-3$, etc. Donc dans le premier cas on aura pour les valeurs satisfaisantes de p et q celles-ci, p^{III}, q^{III}, p^{IX}, q^{IX}, p^{XV}, q^{XV}, etc. et dans le second cas celles-ci, p^{IV}, q^{IV}, p^{X}, q^{X}, p^{XVI}, q^{XVI}, etc. Or les valeurs de μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. sont dans le premier cas 7, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 3, etc. à l'infini, parce que $\mu^{\text{VII}}=\mu^{\text{I}}$ et $\mu^{\text{VIII}}=\mu^{\text{II}}$, etc. ainsi il n'y aura qu'à former par la méthode de l'art. 20 les fractions

$$\begin{array}{cccccccccc} 7, & 1, & 1, & 5, & 3, & 2, & 1, & 1, & 1, & 5, \\ \frac{7}{1}, & \frac{8}{1}, & \frac{15}{2}, & \frac{83}{11}, & \frac{264}{35}, & \frac{611}{81}, & \frac{875}{116}, & \frac{1486}{197}, & \frac{2361}{313}, & \frac{13291}{1762}, \text{ etc.} \end{array}$$

et on pourra prendre pour p les numérateurs de la troisieme, de la neuvieme, etc. et pour q les dénominateurs correspondans; on aura donc $p=15$, $q=2$, ou $p=2361$, $q=313$, ou, etc.

Dans le second cas les valeurs de μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. seront 5, 1, 1, 3, 5, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 1, 1, 2, etc. parce que $\mu^{\text{IX}}=\mu^{\text{III}}$, $\mu^{\text{X}}=\mu^{\text{IV}}$, etc. On formera donc ces fractions-ci,

$$\begin{array}{ccccccccccc} 5, & 1, & 1, & 3, & 5, & 1, & 1, & 1, & 2, & 3, & 5, \\ \frac{5}{1}, & \frac{6}{1}, & \frac{11}{2}, & \frac{39}{7}, & \frac{206}{37}, & \frac{245}{44}, & \frac{451}{81}, & \frac{696}{125}, & \frac{1843}{331}, & \frac{6225}{1118}, & \frac{32968}{5921}, \text{ etc.} \end{array}$$

et les fractions quatrieme, dixieme, etc. donneront les valeurs de p et q, lesquelles seront donc $p=39$, $q=7$, ou $p=6225$, $q=1118$, ou, etc.

De cette maniere on pourra donc trouver par ordre toutes les valeurs de p et q, qui rendront la formule proposée $=-3$, valeur qui est la plus petite qu'elle puisse recevoir. On pourroit même avoir une formule générale qui renfermât toutes ces valeurs de p et de q; on la trouvera, si l'on en est curieux, par la méthode que nous avons exposée ailleurs, et dont nous avons parlé plus haut, (art. 35).

Nous venons de trouver que le *minimum* de la quantité proposée est -3, et par conséquent négatif; or on pourroit proposer de trouver la plus petite valeur positive que la même quantité puisse recevoir, alors il n'y auroit qu'à examiner les séries P^0, P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. dans les deux cas, et on verroit que le plus petit terme positif est 5 dans les deux cas; et comme dans le premier cas c'est P^{IV}, et dans le second P^{III} qui est $=5$, les valeurs de p et de q, qui donneront la plus petite valeur positive de la quantité proposée, seront p^{IV}, q^{IV}, ou p^{X}, q^{X}, ou, etc. dans le premier cas, et p^{III}, q^{III}, ou p^{IX}, q^{IX}, ou, etc. dans le second; de sorte que l'on aura par les fractions ci-dessus $p=83$, $q=11$, ou $p=13291$, $q=1762$, etc. ou $p=11$, $q=2$, $p=1843$, $q=331$, etc.

Au reste, on ne doit pas oublier de remarquer que les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. trouvés dans les deux cas ci-dessus, ne sont autre chose que les termes des fractions continues, qui représentent les deux racines de l'équation

$$9x^2-118x+378=0.$$

De sorte que ces racines seront

$$7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+,\text{ etc.}}}}}$$

$$5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+,\text{ etc.}}}}}$$

expressions qu'on pourra continuer à l'infini par la simple répétition des mêmes nombres.

Ainsi on voit par-là comment on doit s'y prendre pour réduire en fractions continues les racines de toute équation du second degré.

SCOLIE

41. M. Euler a donné dans le tome XI des Nouveaux Commentaires de Pétersbourg[1]) une méthode analogue à la précédente, quoique déduite de

1) Mémoire 323 (suivant l'Index d'Eneström): *De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo.* Novi comment. acad. sc. Petrop. **11** (1765), 1767 p. 28—66; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 2. H. W.

principes un peu différens, pour réduire en fraction continue la racine d'un nombre quelconque entier non-carré, et il y a joint une table où les fractions continues sont calculées pour tous les nombres naturels non-carrés jusqu'à 120. Comme cette table peut être utile en différentes occasions, et sur-tout pour la solution des problemes indéterminés du second degré, comme on le verra plus bas, (§ VII), nous croyons faire plaisir à nos Lecteurs de la leur présenter ici; on remarquera qu'à chaque nombre radical il répond deux suites de nombres entiers; la supérieure est celle des nombres P^0, $-P^{\text{I}}$, P^{II}, $-P^{\text{III}}$, etc. et l'inférieure est celle des nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc.

$\sqrt{2}$	1 1 1 1 etc. 1 2 2 2 etc.	$\sqrt{17}$	1 1 1 1 1 etc. 4 8 8 8 8 etc.
$\sqrt{3}$	1 2 1 2 1 2 1 etc. 1 1 2 1 2 1 2 etc.	$\sqrt{18}$	1 2 1 2 1 2 1 2 1 etc. 4 4 8 4 8 4 8 4 8 etc.
$\sqrt{5}$	1 1 1 1 etc. 2 4 4 4 etc.	$\sqrt{19}$	1 3 5 2 5 3 1 3 5 2 5 3 1 etc. 4 2 1 3 1 2 8 2 1 3 1 2 8 etc.
$\sqrt{6}$	1 2 1 2 1 2 1 etc. 2 2 4 2 4 2 4 etc.	$\sqrt{20}$	1 4 1 4 1 4 1 4 1 etc. 4 2 8 2 8 2 8 2 8 etc.
$\sqrt{7}$	1 3 2 3 1 3 2 3 1 etc. 2 1 1 1 4 1 1 1 4 etc.	$\sqrt{21}$	1 5 4 3 4 5 1 5 4 3 4 5 1 etc. 4 1 1 2 1 1 8 1 1 2 1 1 8 etc.
$\sqrt{8}$	1 4 1 4 1 4 1 etc. 2 1 4 1 4 1 4 etc.	$\sqrt{22}$	1 6 3 2 3 6 1 6 3 2 3 6 1 etc. 4 1 2 4 2 1 8 1 2 4 2 1 8 etc.
$\sqrt{10}$	1 1 1 1 etc. 3 6 6 6 etc.	$\sqrt{23}$	1 7 2 7 1 7 2 7 1 etc. 4 1 3 1 8 1 3 1 8 etc.
$\sqrt{11}$	1 2 1 2 1 2 1 etc. 3 3 6 3 6 3 6 etc.	$\sqrt{24}$	1 8 1 8 1 8 1 etc. 4 1 8 1 8 1 8 etc.
$\sqrt{12}$	1 3 1 3 1 3 1 etc. 3 2 6 2 6 2 6 etc.	$\sqrt{26}$	1 1 1 1 etc. 5 10 10 10 etc.
$\sqrt{13}$	1 4 3 3 4 1 4 3 3 4 1 etc. 3 1 1 1 1 6 1 1 1 1 6 etc.	$\sqrt{27}$	1 2 1 2 1 2 1 etc. 5 5 10 5 10 5 10 etc.
$\sqrt{14}$	1 5 2 5 1 5 2 5 1 etc. 3 1 2 1 6 1 2 1 6 etc.	$\sqrt{28}$	1 3 4 3 1 3 4 3 1 etc 5 3 2 3 10 3 2 3 10 etc.
$\sqrt{15}$	1 6 1 6 1 6 1 etc. 3 1 6 1 6 1 6 etc.	$\sqrt{29}$	1 4 5 5 4 1 4 5 5 4 1 etc. 5 2 1 1 2 10 2 1 1 2 10 etc.

$\sqrt{30}$	1 5 1 5 1 5 1 5 1 etc. 5 2 10 2 10 2 10 2 10 etc.	$\sqrt{48}$	1 12 1 12 1 12 etc. 6 1 12 1 12 1 etc.
$\sqrt{31}$	1 6 5 3 2 3 5 6 1 6 5 etc. 5 1 1 3 5 3 1 1 10 1 1 etc.	$\sqrt{50}$	1 1 1 1 etc. 7 14 14 14 etc.
$\sqrt{32}$	1 7 4 7 1 7 4 7 1 etc. 5 1 1 1 10 1 1 1 10 etc.	$\sqrt{51}$	1 2 1 2 1 2 etc. 7 7 14 7 14 7 etc.
$\sqrt{33}$	1 8 3 8 1 8 3 8 1 etc. 5 1 2 1 10 1 2 1 10 etc.	$\sqrt{52}$	1 3 9 4 9 3 1 3 9 4 9 3 1 3 etc. 7 4 1 2 1 4 14 4 1 2 1 4 14 4 etc.
$\sqrt{34}$	1 9 2 9 1 9 2 9 1 etc. 5 1 4 1 10 1 4 1 10 etc.	$\sqrt{53}$	1 4 7 7 4 1 4 7 7 4 1 4 7 etc. 7 3 1 1 3 14 3 1 1 3 14 3 1 etc.
$\sqrt{35}$	1 10 1 10 1 10 1 10 etc. 5 1 10 1 10 1 10 1 etc.	$\sqrt{54}$	1 5 9 2 9 5 1 5 9 2 9 5 1 5 etc. 7 2 1 6 1 2 14 2 1 6 1 2 14 2 etc.
$\sqrt{37}$	1 1 1 1 1 etc. 6 12 12 12 12 etc.	$\sqrt{55}$	1 6 5 6 1 6 5 6 1 6 etc. 7 2 2 2 14 2 2 2 14 2 etc.
$\sqrt{38}$	1 2 1 2 1 2 1 etc. 6 6 12 6 12 6 12 etc.	$\sqrt{56}$	1 7 1 7 1 7 1 etc. 7 2 14 2 14 2 14 etc.
$\sqrt{39}$	1 3 1 3 1 3 1 etc. 6 4 12 4 12 4 12 etc.	$\sqrt{57}$	1 8 7 3 7 8 1 8 7 etc. 7 1 1 4 1 1 14 1 1 etc.
$\sqrt{40}$	1 4 1 4 1 4 1 etc. 6 3 12 3 12 3 12 etc.	$\sqrt{58}$	1 9 6 7 7 6 9 1 9 6 etc. 7 1 1 1 1 1 1 14 1 1 etc.
$\sqrt{41}$	1 5 5 1 5 5 1 etc. 6 2 2 12 2 2 12 etc.	$\sqrt{59}$	1 10 5 2 5 10 1 10 5 etc. 7 1 2 7 2 1 14 1 2 etc.
$\sqrt{42}$	1 6 1 6 1 6 1 etc. 6 2 12 2 12 2 12 etc.	$\sqrt{60}$	1 11 4 11 1 11 4 etc. 7 1 2 1 14 1 2 etc.
$\sqrt{43}$	1 7 6 3 9 2 9 3 6 7 1 7 6 etc. 6 1 1 3 1 5 1 3 1 1 12 1 1 etc.	$\sqrt{61}$	1 12 3 4 9 5 5 9 4 3 12 1 12 3 etc. 7 1 4 3 1 2 2 1 3 4 1 14 1 4 etc.
$\sqrt{44}$	1 8 5 7 4 7 5 8 1 8 5 etc. 6 1 1 1 2 1 1 1 12 1 1 etc.	$\sqrt{62}$	1 13 2 13 1 13 2 etc. 7 1 6 1 14 1 6 etc.
$\sqrt{45}$	1 9 4 5 4 9 1 9 4 5 4 9 1 9 4 etc. 6 1 2 2 2 1 12 1 2 2 2 1 12 1 2 etc.	$\sqrt{63}$	1 14 1 14 1 14 etc. 7 1 14 1 14 1 etc.
$\sqrt{46}$	1 10 3 7 6 5 2 5 6 7 3 10 1 10 3 etc. 6 1 3 1 1 2 6 2 1 1 3 1 12 1 3 etc.	$\sqrt{65}$	1 1 1 1 etc. 8 16 16 16 etc.
$\sqrt{47}$	1 11 2 11 1 11 2 11 1 etc. 6 1 5 1 12 1 5 1 12 etc.	$\sqrt{66}$	1 2 1 2 1 etc. 8 8 16 8 16 etc.

$\sqrt{67}$	1 3 6 7 9 2 9 7 6 3 1 3 6 etc. 8 5 2 1 1 7 1 1 2 5 16 5 2 etc.	$\sqrt{84}$	1 3 1 3 1 3 etc. 9 6 18 6 18 6 etc.
$\sqrt{68}$	1 4 1 4 1 4 etc. 8 4 16 4 16 4 etc.	$\sqrt{85}$	1 4 9 9 4 1 4 9 etc. 9 4 1 1 4 18 4 1 etc.
$\sqrt{69}$	1 5 4 11 3 11 4 5 1 5 4 etc. 8 3 3 1 4 1 3 3 16 3 3 etc.	$\sqrt{86}$	1 5 10 7 11 2 11 7 10 5 1 5 10 etc. 9 3 1 1 1 8 1 1 1 3 18 3 1 etc.
$\sqrt{70}$	1 6 9 5 9 6 1 6 9 etc. 8 2 1 2 1 2 16 2 1 etc.	$\sqrt{87}$	1 6 1 6 1 6 etc. 9 3 18 3 18 3 etc.
$\sqrt{71}$	1 7 5 11 2 11 5 7 1 7 5 etc. 8 2 2 1 7 1 2 2 16 2 2 etc.	$\sqrt{88}$	1 7 9 8 9 7 1 7 9 etc. 9 2 1 1 1 2 18 2 1 etc.
$\sqrt{72}$	1 8 1 8 1 8 etc. 8 2 16 2 16 2 etc.	$\sqrt{89}$	1 8 5 5 8 1 8 5 etc. 9 2 3 3 2 18 2 3 etc.
$\sqrt{73}$	1 9 8 3 3 8 9 1 9 8 etc. 8 1 1 5 5 1 1 16 1 1 etc.	$\sqrt{90}$	1 9 1 9 1 etc. 9 2 18 2 18 etc.
$\sqrt{74}$	1 10 7 7 10 1 10 7 etc. 8 1 1 1 1 16 1 1 etc.	$\sqrt{91}$	1 10 9 3 14 3 9 10 1 10 9 etc. 9 1 1 5 1 5 1 1 18 1 1 etc.
$\sqrt{75}$	1 11 6 11 1 11 6 etc. 8 1 1 1 16 1 1 etc.	$\sqrt{92}$	1 11 8 7 4 7 8 11 1 11 8 etc. 9 1 1 2 4 2 1 1 18 1 1 etc.
$\sqrt{76}$	1 12 5 8 9 3 4 3 9 8 5 12 1 12 5 etc. 8 1 2 1 1 5 4 5 1 1 2 1 16 1 2 etc.	$\sqrt{93}$	1 12 7 11 4 3 4 11 7 12 1 12 7 etc. 9 1 1 1 4 6 4 1 1 1 18 1 1 etc.
$\sqrt{77}$	1 13 4 7 4 13 1 13 4 etc. 8 1 3 2 3 1 16 1 3 etc.	$\sqrt{94}$	1 13 6 5 9 10 3 15 2 15 3 10 9 5 6 13 1 etc. 9 1 2 3 1 1 5 1 8 1 5 1 1 3 2 1 18 etc.
$\sqrt{78}$	1 14 3 14 1 14 3 etc. 8 1 4 1 16 1 4 etc.	$\sqrt{95}$	1 14 5 14 1 14 etc. 9 1 2 1 18 1 etc.
$\sqrt{79}$	1 15 2 15 1 15 2 etc. 8 1 7 1 16 1 7 etc.	$\sqrt{96}$	1 15 4 15 1 15 etc. 9 1 3 1 18 1 etc.
$\sqrt{80}$	1 16 1 16 1 16 etc. 8 1 16 1 16 1 etc.	$\sqrt{97}$	1 16 3 11 8 9 9 8 11 3 16 1 16 etc. 9 1 5 1 1 1 1 1 1 5 1 18 1 etc.
$\sqrt{82}$	1 1 1 1 etc. 9 18 18 18 etc.	$\sqrt{98}$	1 17 2 17 1 17 etc. 9 1 8 1 18 1 etc.
$\sqrt{83}$	1 2 1 2 1 2 etc. 9 9 18 9 18 9 etc.	$\sqrt{99}$	1 18 1 18 1 etc. 9 1 18 1 18 etc.

Ainsi on aura, par exemple,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} +, \text{ etc.}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} +, \text{ etc.}$$

et ainsi des autres.

Et si on forme les fractions convergentes $\frac{p^0}{q^0}, \frac{p^{\mathrm{I}}}{q^{\mathrm{I}}}, \frac{p^{\mathrm{II}}}{q^{\mathrm{II}}}, \frac{p^{\mathrm{III}}}{q^{\mathrm{III}}}$, etc. d'après chacune de ces fractions continues, on aura

$$(p^0)^2 - 2(q^0)^2 = 1, \quad p^{\mathrm{I}2} - 2q^{\mathrm{I}2} = -1, \quad p^{\mathrm{II}2} - 2q^{\mathrm{II}2} = 1, \quad \text{etc.}$$

et de même,

$$(p^0)^2 - 3(q^0)^2 = 1, \quad p^{\mathrm{I}2} - 3q^{\mathrm{I}2} = -1, \quad p^{\mathrm{II}2} - 3q^{\mathrm{II}2} = 1, \quad \text{etc. etc.}$$

PARAGRAPHE III

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES EN NOMBRES ENTIERS

ADDITION POUR LE CHAPITRE 1[1])

42. Lorsqu'on a à résoudre une équation de cette forme

$$ax - by = c,$$

où a, b, c sont des nombres entiers donnés positifs ou négatifs, et où les deux inconnues x et y doivent être aussi des nombres entiers, il suffit de connoître une seule solution, pour pouvoir en déduire facilement toutes les autres solutions possibles.

En effet, supposons que l'on sache que ces valeurs, $x = \alpha$ et $y = \beta$, satisfont à l'équation proposée, α et β étant des nombres entiers quelconques, on aura donc $a\alpha - b\beta = c$, et par conséquent $ax - by = a\alpha - b\beta$, ou bien $a(x - \alpha) - b(y - \beta) = 0$; d'où l'on tire

$$\frac{x - \alpha}{y - \beta} = \frac{b}{a}.$$

Qu'on réduise la fraction $\frac{b}{a}$ à ses moindres termes, et supposant qu'elle se change par-là en celle-ci, $\frac{b^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{I}}}$, où b^{I} et a^{I} seront premiers entr'eux, il est visible que l'équation $\frac{x-\alpha}{y-\beta} = \frac{b^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{I}}}$ ne sauroit subsister, dans la supposition que $x - \alpha$ et $y - \beta$ soient des nombres entiers, à moins que l'on ait $x - \alpha = mb^{\mathrm{I}}$, et $y - \beta = ma^{\mathrm{I}}$, m étant un nombre quelconque entier; de sorte que l'on aura en général

$$x = \alpha + mb^{\mathrm{I}}, \quad \text{et} \quad y = \beta + ma^{\mathrm{I}},$$

m étant un nombre entier indéterminé.

---

1) Voir p. 326. H. W.

Comme on peut prendre m positif ou négatif à volonté, il est facile de voir qu'on pourra toujours déterminer ce nombre m, en sorte que la valeur de x ne soit pas plus grande que $\frac{b^{\text{I}}}{2}$, ou que celle de y ne soit pas plus grande que $\frac{a^{\text{I}}}{2}$, (abstraction faite des signes de ces quantités); d'où il s'ensuit que si l'équation proposée, $ax - by = c$, est résoluble en nombres entiers, et qu'on y substitue successivement à la place de x tous les nombres entiers tant positifs que négatifs, renfermés entre ces deux limites $\frac{b^{\text{I}}}{2}$ et $\frac{-b^{\text{I}}}{2}$, on en trouvera nécessairement un qui satisfera à cette équation; et on trouvera de même une valeur satisfaisante de y parmi les nombres entiers positifs ou négatifs, contenus entre les limites $\frac{a^{\text{I}}}{2}$ et $\frac{-a^{\text{I}}}{2}$.

Ainsi on pourra par ce moyen trouver une premiere solution de la proposée, après quoi on aura toutes les autres par les formules ci-dessus.

43. Mais si on ne veut pas employer la méthode de tâtonnement que nous venons de proposer, et qui seroit souvent très-laborieuse, on pourra faire usage de celle qui est exposée dans le chapitre 1 du traité précédent, et qui est très-simple et très-directe, ou bien on pourra s'y prendre de la maniere suivante.

On remarquera 1°. que si les nombres a et b ne sont pas premiers entr'eux, l'équation ne pourra subsister en nombres entiers, à moins que le nombre donné c ne soit divisible par la plus grande commune mesure de a et b. De sorte qu'en supposant la division faite lorsqu'elle a lieu, et désignant les quotiens par a^{I}, b^{I}, c^{I}, on aura à résoudre l'équation

$$a^{\text{I}}x - b^{\text{I}}y = c^{\text{I}},$$

où a^{I} et b^{I} seront premiers entr'eux.

2°. Que si l'on peut trouver des valeurs de p et de q qui satisfassent à l'équation

$$a^{\text{I}}p - b^{\text{I}}q = \pm 1,$$

on pourra résoudre l'équation précédente; car il est visible qu'en multipliant ces valeurs par $\pm c^{\text{I}}$, on aura des valeurs qui satisferont à l'équation $a^{\text{I}}x - b^{\text{I}}y = c^{\text{I}}$; c'est-à-dire qu'on aura

$$x = \pm pc^{\text{I}}, \quad \text{et} \quad y = \pm qc^{\text{I}}.$$

Or l'équation $a^{\mathrm{I}}p - b^{\mathrm{I}}q = \pm 1$ est toujours résoluble en nombres entiers, comme nous l'avons démontré dans l'art. 23; et pour trouver les plus petites valeurs de p et de q qui y peuvent satisfaire, il n'y aura qu'à convertir la fraction $\frac{b^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{I}}}$ en fraction continue par la méthode de l'art. 4, et en déduire ensuite la série des fractions *principales* convergentes vers la même fraction $\frac{b^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{I}}}$ par les formules de l'art. 10; la derniere de ces fractions sera la fraction même $\frac{b^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{I}}}$, et si on désigne l'avant-derniere par $\frac{p}{q}$, on aura par la loi de ces fractions, (art. 12), $a^{\mathrm{I}}p - b^{\mathrm{I}}q = \pm 1$, le signe supérieur étant pour le cas où le quantieme de la fraction $\frac{p}{q}$ est pair, et l'inférieur pour celui où ce quantieme est impair.

Ces valeurs de p et de q étant ainsi connues, on aura donc d'abord $x = \pm pc^{\mathrm{I}}$ et $y = \pm qc^{\mathrm{I}}$, et prenant ensuite ces valeurs pour α et β, on aura en général, (art. 42),

$$x = \pm pc^{\mathrm{I}} + mb^{\mathrm{I}}, \quad y = \pm qc^{\mathrm{I}} + ma^{\mathrm{I}},$$

expressions qui renfermeront nécessairement toutes les solutions possibles en nombres entiers de l'équation proposée.

Au reste, pour ne laisser aucun embarras dans la pratique de cette méthode, nous remarquerons que quoique les nombres a et b puissent être positifs ou négatifs, on peut néanmoins les prendre toujours positivement, pourvu qu'on donne des signes contraires à x, si a est négatif, et à y, si b est négatif.

EXEMPLE

44. Pour donner un exemple de la méthode précédente, nous prendrons celui de l'art. 14 du chapitre 1 du traité précédent [p. 332] où il s'agit de résoudre l'équation $39p = 56q + 11$; changeant p en x et q en y, on aura donc

$$39x - 56y = 11.$$

Ainsi on fera $a = 39$, $b = 56$ et $c = 11$; et comme 56 et 39 sont déjà premiers entr'eux, on aura $a^{\mathrm{I}} = 39$, $b^{\mathrm{I}} = 56$, $c^{\mathrm{I}} = 11$. On réduira donc en fraction continue la fraction $\frac{b^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{I}}} = \frac{56}{39}$, et pour cela on fera, (comme on l'a déjà pratiqué dans l'art. 20), le calcul suivant,

$$
\begin{array}{r|r|r|r|r|r|l}
39 & 56 & 1 & & & & \\
 & 39 & & & & & \\
\cline{2-2}
 & 17 & 39 & 2 & & & \\
 & & 34 & & & & \\
\cline{3-3}
 & & 5 & 17 & 3 & & \\
 & & & 15 & & & \\
\cline{4-4}
 & & & 2 & 5 & 2 & \\
 & & & & 4 & & \\
\cline{5-5}
 & & & & 1 & 2 & 2 \\
 & & & & & 2 & \\
\cline{6-6}
 & & & & & 0. &
\end{array}
$$

Ensuite, à l'aide des quotiens 1, 2, 3, etc. on formera les fractions

$$
\begin{array}{ccccc}
1, & 2, & 3, & 2, & 2, \\
\frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{10}{7}, & \frac{23}{16}, & \frac{56}{39},
\end{array}
$$

et la pénultieme fraction $\frac{23}{16}$ sera celle que nous avons désignée en général par $\frac{p}{q}$; de sorte qu'on aura $p = 23$, $q = 16$; et comme cette fraction est la quatrieme, et par conséquent d'un quantieme pair, il faudra prendre le signe supérieur; ainsi l'on aura en général

$$x = 23 \cdot 11 + 56m, \quad \text{et} \quad y = 16 \cdot 11 + 39m,$$

m pouvant être un nombre quelconque entier positif ou négatif.

REMARQUE

45. On doit la premiere solution de ce probleme à M. Bachet de Meziriac qui l'a donnée dans la seconde édition de ses Récréations mathématiques, intitulées *Problemes plaisans et délectables, etc.* La premiere édition de cet Ouvrage a paru en 1612, mais la solution dont il s'agit n'y est qu'annoncée, et ce n'est que dans l'édition de 1624 qu'on la trouve complette. La méthode de M. Bachet est très-directe et très-ingénieuse, et ne laisse rien à désirer du côté de l'élégance et de la généralité.

Nous saisissons avec plaisir cette occasion de rendre à ce savant Auteur la justice qui lui est due sur ce sujet, parce que nous avons remarqué que les Géometres qui ont traité le même probleme après lui, n'ont jamais fait aucune mention de son travail.

Voici en peu de mots à quoi se réduit la méthode de M. Bachet. Après avoir fait voir comment la solution des équations de la forme

$$ax - by = c,$$

(a et b étant premiers entr'eux), se réduit à celle de

$$ax - by = \pm 1,$$

il s'attache à résoudre cette derniere équation, et pour cela il prescrit de faire entre les nombres a et b la même opération que si on vouloit chercher leur plus grand commun diviseur, (c'est aussi la même que nous avons pratiquée ci-devant); ensuite nommant c, d, e, f, etc. les restes provenant des différentes divisions, et supposant, par exemple, que f soit le dernier reste, qui sera nécessairement égal à l'unité, (à cause que a et b sont premiers entr'eux, *hyp.*), il fait, lorsque le nombre des restes est pair, comme dans ce cas,

$$e \mp 1 = \varepsilon, \quad \frac{\varepsilon d \pm 1}{e} = \delta, \quad \frac{\delta c \mp 1}{d} = \gamma, \quad \frac{\gamma b \pm 1}{c} = \beta, \quad \frac{\beta a \mp 1}{b} = \alpha;$$

ces derniers nombres β et α seront les plus petites valeurs de x et y.

Si le nombre des restes étoit impair, comme si g étoit le dernier reste $= 1$, alors il faudroit faire

$$f \pm 1 = \zeta, \quad \frac{\zeta e \mp 1}{f} = \varepsilon, \quad \frac{\varepsilon d \pm 1}{e} = \delta, \text{ etc.}$$

Il est facile de voir que cette méthode revient au même dans le fond que celle du chapitre premier; mais elle en est moins commode, parce qu'elle demande des divisions; au reste, les Géometres qui sont curieux de ces matieres, verront avec plaisir dans l'Ouvrage de M. Bachet les artifices qu'il a employés pour parvenir à la regle précédente, et pour en déduire la solution complette des équations de la forme $ax - by = c$.

PARAGRAPHE IV

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR RÉSOUDRE EN NOMBRES ENTIERS LES ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES DONT L'UNE NE PASSE PAS LE PREMIER DEGRÉ

ADDITION POUR LE CHAPITRE 3[1])

46. Soit proposée l'équation générale,

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fx^3 + gx^2y + hx^4 + kx^3y +, \text{etc.} = 0,$$

dans laquelle les coefficiens a, b, c, etc. soient des nombres entiers donnés, et où x et y soient deux nombres indéterminés, qui doivent aussi être entiers.

Tirant la valeur de y de cette équation, on aura

$$y = -\frac{a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 +, \text{etc.}}{c + ex + gx^2 + kx^3 +, \text{etc.}};$$

ainsi la question sera réduite à trouver un nombre entier qui, étant pris pour x, rende le numérateur de cette fraction divisible par son dénominateur.

Soit supposé

$$p = a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 +, \text{etc.}$$
$$q = c + ex + gx^2 + kx^3 +, \text{etc.}$$

et qu'on retranche x de ces deux équations par les regles ordinaires de l'Algebre, on aura une équation finale de cette forme,

$$A + Bp + Cq + Dp^2 + Epq + Fq^2 + Gp^3 +, \text{etc.} = 0,$$

où les coefficiens A, B, C, etc. seront des fonctions rationnelles et entieres des nombres a, b, c, etc.

---

1) Voir p. 345. H. W.

Maintenant, puisque $y = -\frac{p}{q}$, on aura aussi $p = -qy$; de sorte qu'en substituant cette valeur de p, il viendra

$$A - Byq + Cq + Dy^2q^2 - Eq^2y + Fq^2 -, \text{etc.} = 0,$$

où l'on voit que tous les termes sont multipliés par q, à l'exception du premier terme A; donc il faudra que le nombre A soit divisible par le nombre q, autrement il seroit impossible que les nombres q et y pussent être entiers à la fois.

On cherchera donc tous les diviseurs du nombre entier connu A, et on prendra successivement chacun de ces diviseurs pour q; on aura par chacune de ces suppositions une équation déterminée en x, dont on cherchera, par les méthodes connues, les racines rationnelles et entieres, s'il y en a; on substituera ensuite ces racines à la place de x, et on verra si les valeurs résultantes de p et de q seront telles que $\frac{p}{q}$ soit un nombre entier. On sera sûr de trouver par ce moyen toutes les valeurs entieres de x, qui peuvent donner aussi des valeurs entieres pour y dans l'équation proposée.

De-là on voit que le nombre des solutions en entiers de ces sortes d'équations est toujours nécessairement limité; mais il y a un cas qui doit être excepté, et qui échappe à la méthode précédente.

47. Ce cas est celui où les coefficiens e, g, k, etc. sont nuls, en sorte que l'on ait simplement

$$y = -\frac{a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 +, \text{etc.}}{c};$$

or voici comment il faudra s'y prendre pour trouver toutes les valeurs de x qui pourront rendre la quantité

$$a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 +, \text{etc.}$$

divisible par le nombre donné c: je suppose d'abord qu'on ait trouvé un nombre entier n qui satisfasse à cette condition, il est facile de voir que tout nombre de la forme $n \pm \mu c$ y satisfera aussi, μ étant un nombre quelconque entier; de plus, si n est $> \frac{c}{2}$, (abstraction faite des signes de n et de c), on pourra toujours déterminer le nombre μ et le signe qui le précede, en sorte que le nombre $n \pm \mu c$ devienne $< \frac{c}{2}$; et il est aisé de voir que cela ne sauroit se faire que d'une seule maniere, les valeurs de n et de c

étant données; donc, si on désigne par n^{I} cette valeur de $n \pm \mu c$, laquelle est $< \frac{c}{2}$, et qui satisfait à la condition dont il s'agit, on aura en général

$$n = n^{\text{I}} \mp \mu c,$$

μ étant un nombre quelconque.

D'où je conclus que si on substitue successivement, dans la formule $a + bx + dx^2 + fx^3 +$, etc. à la place de x tous les nombres entiers positifs ou négatifs qui ne passent pas $\frac{c}{2}$, et qu'on dénote par n^{I}, n^{II}, n^{III}, etc. ceux de ces nombres qui rendront la quantité $a + bx + dx^2 +$, etc. divisible par c, tous les autres nombres qui pourront faire le même effet, seront nécessairement renfermés dans ces formules

$$n^{\text{I}} \pm \mu^{\text{I}} c, \quad n^{\text{II}} \pm \mu^{\text{II}} c, \quad n^{\text{III}} \pm \mu^{\text{III}} c, \text{ etc.}$$

μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc. étant des nombres quelconques entiers.

On pourroit faire ici différentes remarques pour faciliter la recherche des nombres n^{I}, n^{II}, n^{III}, etc. mais nous ne croyons pas devoir nous arrêter davantage sur ce sujet, d'autant que nous avons déjà eu occasion de le traiter dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin pour l'année 1768,[1]) et qui a pour titre *Nouvelle Méthode pour résoudre les Problemes indéterminés.*[2])

48. Je dirai cependant encore un mot de la maniere de déterminer deux nombres x et y, en sorte que la fraction

$$\frac{ay^m + by^{m-1}x + dy^{m-2}x^2 + fy^{m-3}x^3 +, \text{etc.}}{c}$$

devienne un nombre entier; c'est une recherche qui nous sera fort utile dans la suite.

Je suppose que y et x doivent être premiers entr'eux, et que de plus y doive être premier à c, je dis qu'on pourra toujours faire

$$x = ny - cz,$$

1) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. II, p. 655. H. W.

2) Les éditions ultérieures contiennent l'addition suivante:

„Voyez aussi un Mémoire de LEGENDRE *Sur l'Analyse indéterminée*, dans le Recueil de l'Academie des Sciences de Paris pour l'année 1785.“ H. W.

n et z étant des nombres indéterminés; car en regardant x, y et c comme des nombres donnés, on aura une équation qui sera toujours résoluble en entiers par la méthode du § III, à cause que y et c n'ont d'autre commune mesure que l'unité, par l'hypothese. Or, si on substitue cette expression de x dans la quantité $ay^m + by^{m-1}x + dy^{m-2}x^2 +$, etc. elle deviendra

$$(a + bn + dn^2 + fn^3 +, \text{etc.})y^m - (b + 2dn + 3fn^2 +, \text{etc.})cy^{m-1}z$$
$$+ (d + 3fn +, \text{etc.})c^2y^{m-2}z^2 -, \text{etc.}$$

et il est clair que cette quantité ne sauroit être divisible par c, à moins que le premier terme

$$(a + bn + dn^2 + fn^3 +, \text{etc.})y^m$$

ne le soit, puisque tous les autres termes sont des multiples de c. Donc, comme c et y sont supposés premiers entr'eux, il faudra que la quantité

$$a + bn + dn^2 + fn^3 +, \text{etc.}$$

soit elle-même divisible par c; ainsi il n'y aura qu'à chercher par la méthode de l'art. précédent toutes les valeurs de n qui pourront satisfaire à cette condition, et alors on aura en général

$$x = ny - cz,$$

z étant un nombre quelconque entier.

Il est bon d'observer que quoique nous ayons supposé que les nombres x et y doivent être premiers entr'eux, ainsi que les nombres y et c, notre solution n'en est cependant pas moins générale; car si on vouloit que x et y eussent une commune mesure α, il n'y auroit qu'à mettre αx^{I} et αy^{I} à la place de x et y, et on regarderoit ensuite x^{I} et y^{I} comme premiers entr'eux; de même si y^{I} et c devoient avoir une commune mesure β, on pourroit mettre βy^{II} à la place de y^{I}, et il seroit permis de regarder y^{II} et c comme premiers entr'eux.[1])

1) L'article 48 est rédigé un peu différemment dans les éditions de l'an III et de 1798, ainsi que dans celle de SERRET, mais dans l'édition ultérieure de 1807, la forme originale en est rétablie. Aux endroits cités, l'article en question commence ainsi:

„Considérons maintenant les équations de la forme

$$ay^m + by^{m-1}x + cy^{m-2}x^2 + dy^{m-3}x^3 + \cdots = h,$$

dans lesquelles $a, b, c \cdots, h$ sont des nombres entiers donnés, et où les deux indéterminées x, y, qui forment partout dans le premier membre le même nombre m de dimensions, doivent être aussi des nombres entiers.“

La suite ne présente plus de changements. La fin de cet article est modifiée comme suit:

„Nous avons supposé, dans la solution précédente, que x et y doivent être premiers entre eux, ainsi que y et h entre eux; ces suppositions sont permises, puisque les nombres x et y sont indéterminés; mais, comme elles ne paraissent point absolument nécessaires, il faut encore examiner dans quels cas elles peuvent cesser d'avoir lieu.

Supposons donc: 1^0 que x et y puissent avoir une commune mesure α; il n'y aura qu'à mettre partout, dans l'équation proposée, αx_1, αy_1 à la place de x et y, et regarder ensuite x_1 et y_1 comme premiers entre eux. Or, par cette substitution, il est clair que tous les termes du premier membre de l'équation se trouveront multipliés par α^m; par conséquent, il faudra que le second membre h soit divisible par α^m: d'où il suit qu'on ne peut prendre pour α que les diviseurs du nombre h qui s'y trouveront élevés à la puissance m. Ainsi, si le nombre h ne contient aucun facteur élevé à la puissance m, on sera assuré que les nombres x et y devront nécessairement être premiers entre eux.

Si le nombre h contient un ou plusieurs facteurs élevés à la puissance m, alors il faudre prendre successivement pour α chaque facteur ou combinaison de facteurs, dont la puissance m divisera le nombre h, et l'on aura autant de solutions différentes en regardant dans chacune x_1 et y_1 comme premiers entre eux.

Supposons: 2^0 que y et h aient une commune mesure β, on mettra βy_1 et βh_1 à la place de y et h, et l'on regardera ensuite y_1 et h_1 comme premiers entre eux. Par ces substitutions, tous les termes du premier membre qui contiennent y se trouveront multipliés par une puissance de β; il n'y aura que le dernier terme, que je représenterai par gx^m, qui, ne contenant point y, ne se trouvera point multiplié par β. Mais, puisque le second membre h devient βh_1, il s'ensuit que le terme gx^m devra aussi être divisible par β; or, x et y étant déjà supposés premiers entre eux, x ne saurait être divisible par β; donc il faudra que le coefficient g le soit. D'où je conclus qu'on pourra prendre pour β successivement tous les diviseurs de g, et, après la substitution de βy_1 et βh_1 au lieu de y et de h et la division de toute l'équation par β, on aura de nouveau le cas ou l'indéterminée y_1 sera nécessairement première au nombre h_1 qui formera le second membre.“ H. W.

PARAGRAPHE V

MÉTHODE DIRECTE ET GÉNÉRALE POUR TROUVER LES VALEURS DE x QUI PEUVENT RENDRE RATIONNELLES LES QUANTITÉS DE LA FORME $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ ET POUR RÉSOUDRE EN NOMBRES RATIONNELS LES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU SECOND DEGRÉ A DEUX INCONNUES LORSQU'ELLES ADMETTENT DES SOLUTIONS DE CETTE ESPECE

ADDITION POUR LE CHAPITRE 4[1])

49. Je suppose d'abord que les nombres connus a, b, c soient entiers; s'ils étoient fractionnaires, il n'y auroit qu'à les réduire à un même dénominateur carré, et alors il est clair qu'on pourroit toujours faire abstraction de leur dénominateur; quant au nombre x, on supposera ici qu'il puisse être entier ou fractionnaire, et on verra par la suite comment il faudra résoudre la question, lorsqu'on ne veut admettre que des nombres entiers.

Soit donc

$$\sqrt{(a+bx+cx^2)} = y,$$

et l'on en tirera

$$2cx + b = \sqrt{(4cy^2 + b^2 - 4ac)};$$

de sorte que la difficulté sera réduite à rendre rationnelle la quantité

$$\sqrt{(4cy^2 + b^2 - 4ac)}.$$

50. Supposons donc en général qu'on ait à rendre rationnelle la quantité $\sqrt{(Ay^2+B)}$, c'est-à-dire, à rendre Ay^2+B égal à un carré, A et B étant des nombres entiers donnés positifs ou négatifs, et y un nombre indéterminé qui doit être rationnel.

---

1) Voir p. 349. H. W.

Il est d'abord clair que si l'un des nombres A ou B étoit $=1$, ou égal à un carré quelconque, le probleme seroit résoluble par les méthodes connues de DIOPHANTE, qui sont détaillées dans le chapitre 4; ainsi nous ferons ici abstraction de ces cas, ou plutôt nous tâcherons d'y ramener tous les autres.

De plus, si les nombres A et B étoient divisibles par des nombres carrés quelconques, on pourroit aussi faire abstraction de ces diviseurs, c'est-à-dire, les supprimer, en ne prenant pour A et B que les quotiens qu'on auroit après avoir divisé les valeurs données par les plus grands carrés possibles; en effet, supposant $A=\alpha^2A^1$, $B=\beta^2B^1$, on aura à rendre carré le nombre $A^1\alpha^2y^2+B^1\beta^2$; donc divisant par β^2, et faisant $\frac{\alpha y}{\beta}=y^1$, il s'agira de déterminer l'inconnue y^1, en sorte que $A^1y^{12}+B^1$ soit un carré.

D'où il s'ensuit que dès qu'on aura trouvé une valeur de y propre à rendre Ay^2+B égal à un carré, en rejetant dans les valeurs données de A et de B les facteurs carrés α^2 et β^2 qu'elles pourroient renfermer, il n'y aura qu'à multiplier la valeur trouvée de y par $\frac{\beta}{\alpha}$, pour avoir celle qui convient à la quantité proposée.

51. Considérons donc la formule Ay^2+B, dans laquelle A et B soient des nombres entiers donnés qui ne soient divisibles par aucun carré; et comme on suppose que y puisse être une fraction, faisons $y=\frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers et premiers entr'eux, pour que la fraction soit réduite à ses moindres termes; on aura donc la quantité $\frac{Ap^2}{q^2}+B$ qui devra être un carré; donc Ap^2+Bq^2 devra en être un aussi; de sorte qu'on aura à résoudre l'équation

$$Ap^2+Bq^2=z^2,$$

en supposant p, q et z des nombres entiers.

Or je dis qu'il faudra que q soit premier à A, et que p le soit à B; car si q et A avoient un commun diviseur, il est clair que le terme Bq^2 seroit divisible par le carré de ce diviseur; et que le terme Ap^2 ne seroit divisible que par la premiere puissance du même diviseur, à cause que q et p sont premiers entr'eux, et que A est supposé ne contenir aucun facteur carré; donc le nombre Ap^2+Bq^2 ne seroit divisible qu'une seule fois par le diviseur commun de q et de A, par conséquent il seroit impossible que ce nombre fût un carré. On prouvera de même que p et B ne sauroient avoir aucun diviseur commun.

Résolution de l'équation $Ap^2 + Bq^2 = z^2$ en nombres entiers

52. Supposons A plus grand que B, on écrira cette équation ainsi,

$$Ap^2 = z^2 - Bq^2,$$

et on remarquera que comme les nombres p, q et z doivent être entiers, il faudra que $z^2 - Bq^2$ soit divisible par A.

Donc, puisque A et q sont premiers entr'eux, (art. précédent), on fera, suivant la méthode du § IV, art. 48, ci-dessus,

$$z = nq - Aq^{\mathrm{I}},$$

n et q^{I} étant deux nombres entiers indéterminés; ce qui changera la formule $z^2 - Bq^2$ en celle-ci,

$$(n^2 - B)q^2 - 2nAqq^{\mathrm{I}} + A^2q^{\mathrm{I}2},$$

dans laquelle il faudra que $n^2 - B$ soit divisible par A, en prenant pour n un nombre entier non $> \frac{A}{2}$.

On essayera donc pour n tous les nombres entiers qui ne surpassent pas $\frac{A}{2}$, et si on n'en trouve aucun qui rende $n^2 - B$ divisible par A, on en conclura sur le champ que l'équation $Ap^2 = z^2 - Bq^2$ n'est pas résoluble en nombres entiers, et qu'ainsi la quantité $Ay^2 + B$ ne sauroit jamais devenir un carré.

Mais si on trouve une ou plusieurs valeurs satisfaisantes de n, on les mettra l'une après l'autre à la place de n, et on poursuivra le calcul comme on va le voir.

Je remarquerai seulement encore qu'il seroit inutile de donner aussi à n des valeurs plus grandes que $\frac{A}{2}$; car nommant n^{I}, n^{II}, n^{III}, etc. les valeurs de n moindres que $\frac{A}{2}$, qui rendront $n^2 - B$ divisible par A, toutes les autres valeurs de n qui pourront faire le même effet seront renfermées dans ces formules, $n^{\mathrm{I}} \pm \mu^{\mathrm{I}}A$, $n^{\mathrm{II}} \pm \mu^{\mathrm{II}}A$, $n^{\mathrm{III}} \pm \mu^{\mathrm{III}}A$, etc. (article 47 du § IV); or, substituant ces valeurs à la place de n dans la formule $(n^2 - B)q^2 - 2nAqq^{\mathrm{I}} + A^2q^{\mathrm{I}2}$, c'est-à-dire $(nq - Aq^{\mathrm{I}})^2 - Bq^2$, il est clair qu'on aura les mêmes résultats que si on mettoit seulement n^{I}, n^{II}, n^{III}, etc. à la place de n, et qu'on ajoutât à q^{I} les quantités $\mp \mu^{\mathrm{I}}q$, $\mp \mu^{\mathrm{II}}q$, $\mp \mu^{\mathrm{III}}q$, etc., de sorte que, comme q^{I} est un nombre indéterminé, ces substitutions ne donneroient pas des formules différentes de celles qu'on aura par la simple substitution des valeurs n^{I}, n^{II}, n^{III}, etc.

53. Puis donc que $n^2 - B$ doit être divisible par A, soit A^{I} le quotient de cette division, en sorte que $AA^{\text{I}} = n^2 - B$; et l'équation

$$Ap^2 = z^2 - Bq^2 = (n^2 - B)q^2 - 2nAqq^{\text{I}} + A^2q^{\text{I}2},$$

étant divisée par A, deviendra celle-ci,

$$p^2 = A^{\text{I}}q^2 - 2nqq^{\text{I}} + Aq^{\text{I}2},$$

où A^{I} sera nécessairement moindre que A, à cause que $A^{\text{I}} = \frac{n^2 - B}{A}$ et que $B < A$, et n non $> \frac{A}{2}$.

Or, 1°. si A^{I} est un nombre carré, il est clair que cette équation sera résoluble par les méthodes connues, et l'on en aura la solution la plus simple qu'il est possible, en faisant $q^{\text{I}} = 0$, $q = 1$ et $p = \sqrt{A^{\text{I}}}$.

2°. Si A^{I} n'est pas égal à un carré, on verra si ce nombre est moindre que B, ou au moins s'il est divisible par un nombre quelconque carré, en sorte que le quotient soit moindre que B, abstraction faite des signes; alors on multipliera toute l'équation par A^{I}, et l'on aura, à cause de $AA^{\text{I}} - n^2 = -B$,

$$A^{\text{I}}p^2 = (A^{\text{I}}q - nq^{\text{I}})^2 - Bq^{\text{I}2};$$

de sorte qu'il faudra que $Bq^{\text{I}2} + A^{\text{I}}p^2$ soit un carré; donc divisant par p^2 et faisant $\frac{q^{\text{I}}}{p} = y^{\text{I}}$ et $A^{\text{I}} = C$, on aura à rendre carrée la formule $By^{\text{I}2} + C$, laquelle est, comme l'on voit, analogue à celle de l'art. 50. Ainsi, si C contient un facteur carré γ^2, on pourra le supprimer, en ayant attention de multiplier ensuite par γ la valeur qu'on trouvera pour y^{I}, pour avoir sa véritable valeur; et l'on aura une formule qui sera dans le cas de celle de l'art. 51, mais avec cette différence que les coefficiens B et C de celle-ci seront moindres que les coefficiens A et B de celle-là.

54. Mais si A^{I} n'est pas moindre que B, ni ne peut le devenir en le divisant par le plus grand carré qui le mesure, alors on fera $q = \nu q^{\text{I}} + q^{\text{II}}$, et substituant cette valeur dans l'équation, elle deviendra

$$p^2 = A^{\text{I}}q^{\text{II}2} - 2n^{\text{I}}q^{\text{II}}q^{\text{I}} + A^{\text{II}}q^{\text{I}2},$$

où

$$n^{\text{I}} = n - \nu A^{\text{I}}, \quad \text{et} \quad A^{\text{II}} = A^{\text{I}}\nu^2 - 2n\nu + A = \frac{n^{\text{I}2} - B}{A^{\text{I}}}.$$

On déterminera, ce qui est toujours possible, le nombre entier ν, en sorte que n^{I} ne soit pas $> \frac{A^{\text{I}}}{2}$, abstraction faite des signes, et alors il est clair que A^{II} deviendra $< A^{\text{I}}$, à cause de $A^{\text{II}} = \frac{n^{\text{I}2} - B}{A^{\text{I}}}$ et de $B =$ ou $< A^{\text{I}}$ et $n^{\text{I}} =$ ou $< \frac{A^{\text{I}}}{2}$.

On fera donc ici le même raisonnement que nous avons fait dans l'article précédent, et si A^{II} est carré, on aura la résolution de l'équation; si A^{II} n'est pas carré, mais qu'il soit $< B$ ou qu'il le devienne, étant divisé par un carré, on multipliera l'équation par A^{II} et on aura, en faisant $\frac{p}{q^{\text{II}}} = y^{\text{I}}$ et $A^{\text{II}} = C$, la formule $By^{\text{I}2} + C$, qui devra être un carré, et dans laquelle les coefficiens B et C, (après avoir supprimé dans C les diviseurs carrés, s'il y en a), seront moindres que ceux de la formule $Ay^2 + B$ de l'art. 51.

Mais si ces cas n'ont pas lieu, on fera, comme ci-dessus, $q^{\text{I}} = \nu^{\text{I}} q^{\text{II}} + q^{\text{III}}$, et l'équation se changera en celle-ci,

$$p^2 = A^{\text{III}} q^{\text{II}2} - 2 n^{\text{II}} q^{\text{II}} q^{\text{III}} + A^{\text{II}} q^{\text{III}2},$$

où

$$n^{\text{II}} = n^{\text{I}} - \nu^{\text{I}} A^{\text{II}}, \quad \text{et} \quad A^{\text{III}} = A^{\text{II}} \nu^{\text{I}2} - 2 n^{\text{I}} \nu^{\text{I}} + A^{\text{I}} = \frac{n^{\text{II}2} - B}{A^{\text{II}}}.$$

On prendra donc pour ν^{I} un nombre entier, tel que n^{II} ne soit pas $> \frac{A^{\text{II}}}{2}$, abstraction faite des signes; et comme B n'est pas $> A^{\text{II}}$, (*hyp.*), il s'ensuit de l'équation $A^{\text{III}} = \frac{n^{\text{II}2} - B}{A^{\text{II}}}$ que A^{III} sera $< A^{\text{II}}$; ainsi on pourra faire derechef les mêmes raisonnemens que ci-dessus, et on en tirera des conclusions semblables, et ainsi de suite.

Maintenant, comme les nombres A, A^{I}, A^{II}, A^{III}, etc. forment une suite décroissante de nombres entiers, il est visible qu'en continuant cette suite on parviendra nécessairement à un terme moindre que le nombre donné B; et alors nommant ce terme C, on aura, comme nous l'avons vu ci-dessus, la formule $By^{\text{I}2} + C$ à rendre égale à un carré. De sorte que par les opérations que nous venons d'exposer, on sera toujours assuré de pouvoir ramener la formule $Ay^2 + B$ à une autre plus simple, telle que $By^2 + C$, au moins si le probleme est résoluble.

55. Or, de même qu'on a réduit la formule $Ay^2 + B$ à celle-ci $By^{\text{I}2} + C$, on pourra réduire cette derniere à cette autre-ci, $Cy^{\text{II}2} + D$, où D sera moindre que C, et ainsi de suite; et comme les nombres A, B, C, D, etc. forment une série décroissante de nombres entiers, il est clair que cette série ne pourra pas aller à l'infini, et qu'ainsi l'opération sera toujours nécessai-

rement terminée. Si la question n'admet point de solution en nombres rationnels, on parviendra à une condition impossible; mais si la question est résoluble, on arrivera toujours à une équation semblable à celle de l'art. 53, et où l'un des coefficiens, comme A^{I}, sera carré; en sorte qu'elle sera susceptible des méthodes connues; or cette équation étant résolue, on pourra, en rétrogradant, résoudre successivement toutes les équations précédentes, jusqu'à la premiere $Ap^2 + Bq^2 = z^2$.

Eclaircissons cette méthode par quelques exemples.

EXEMPLE I

56. *Soit proposé de trouver une valeur rationnelle de x, telle que la formule*

$$7 + 15x + 13x^2$$

devienne un carré. (Voyez chapitre 4, art. 57 du traité précédent.)

On aura donc ici $a = 7$, $b = 15$, $c = 13$; donc $4c = 4 \cdot 13$, et $b^2 - 4ac = -139$; de sorte qu'en nommant y la racine du carré dont il s'agit, on aura la formule

$$4 \cdot 13y^2 - 139$$

qui devra être un carré; ainsi on aura $A = 4 \cdot 13$ et $B = -139$, où l'on remarquera d'abord que A est divisible par le carré 4; de sorte qu'il faudra rejeter ce diviseur carré et supposer simplement $A = 13$; mais on se souviendra ensuite de diviser par 2 la valeur qu'on trouvera pour y, (art. 50).

On aura donc, en faisant $y = \frac{p}{q}$, l'équation $13p^2 - 139q^2 = z^2$, ou bien, à cause que 139 est > 13, on fera $y = \frac{q}{p}$, pour avoir $-139p^2 + 13q^2 = z^2$, équation qu'on écrira ainsi,

$$-139p^2 = z^2 - 13q^2.$$

On fera, (art. 52), $z = nq - 139q^{\mathrm{I}}$, et il faudra prendre pour n un nombre entier non $> \frac{139}{2}$, c'est-à-dire < 70, tel que $n^2 - 13$ soit divisible par 139; je trouve $n = 41$, ce qui donne $n^2 - 13 = 1668 = 139 \cdot 12$; de sorte qu'en faisant la substitution et divisant ensuite par -139, on aura l'équation

$$p^2 = -12q^2 + 2 \cdot 41\, qq^{\mathrm{I}} - 139q^{\mathrm{I}2}.$$

Or, comme -12 n'est pas un carré, cette équation n'a pas encore les conditions requises; ainsi, puisque 12 est déjà moindre que 13, on multipliera toute l'équation par -12, et elle deviendra $-12p^2 = (-12q + 41q^{\text{I}})^2 - 13q^{\text{I}2}$, de sorte qu'il faudra que $13q^{\text{I}2} - 12p^2$ soit un carré, ou bien, en faisant $\frac{q^{\text{I}}}{p} = y^{\text{I}}$, que $13y^{\text{I}2} - 12$ en soit un aussi.

On voit ici qu'il n'y auroit qu'à faire $y^{\text{I}} = 1$, mais comme ce n'est que le hasard qui nous donne cette valeur, nous allons poursuivre le calcul selon notre méthode, jusqu'à ce que l'on arrive à une formule qui soit susceptible des méthodes ordinaires. Comme 12 est divisible par 4, je rejette ce diviseur carré, en me souvenant que je dois ensuite multiplier la valeur de y^{I} par 2; j'aurai donc à rendre carrée la formule $13y^{\text{I}2} - 3$, ou bien, en faisant $y^{\text{I}} = \frac{r}{s}$, (on suppose que r et s sont des nombres entiers premiers entr'eux, en sorte que la fraction $\frac{r}{s}$ soit déjà réduite à ses moindres termes, comme la fraction $\frac{q}{p}$), celle-ci $13r^2 - 3s^2$; soit la racine z^{I}, j'aurai

$$13r^2 = z^{\text{I}2} + 3s^2,$$

et je ferai $z^{\text{I}} = ms - 13s^{\text{I}}$, m étant un nombre entier non $> \frac{13}{2}$, c'est-à-dire < 7, et tel que $m^2 + 3$ soit divisible par 13; or je trouve $m = 6$, ce qui donne $m^2 + 3 = 39 = 13 \cdot 3$; donc substituant la valeur de z^{I} et divisant toute l'équation par 13, on aura

$$r^2 = 3s^2 - 2 \cdot 6ss^{\text{I}} + 13s^{\text{I}2}.$$

Comme le coefficient 3 de s^2 n'est ni carré ni moindre que celui de s^2 dans l'équation précédente, on fera, (art. 54), $s = \mu s^{\text{I}} + s^{\text{II}}$, et substituant l'on aura la transformée

$$r^2 = 3s^{\text{II}2} - 2(6 - 3\mu)s^{\text{II}}s^{\text{I}} + (3\mu^2 - 2 \cdot 6\mu + 13)s^{\text{I}2};$$

on déterminera μ, en sorte que $6 - 3\mu$ ne soit pas $> \frac{3}{2}$, et il est clair qu'il faudra faire $\mu = 2$, ce qui donne $6 - 3\mu = 0$; et l'équation deviendra

$$r^2 = 3s^{\text{II}2} + s^{\text{I}2},$$

laquelle est, comme l'on voit, réduite à l'état demandé, puisque le coefficient du carré de l'une des deux indéterminées du second membre est aussi carré.

On fera donc, pour avoir la solution la plus simple qu'il est possible, $s^{\text{II}} = 0$, $s^{\text{I}} = 1$ et $r = 1$; donc $s = \mu = 2$, et de-là $y^{\text{I}} = \frac{r}{s} = \frac{1}{2}$; mais nous avons vu qu'il faut multiplier la valeur de y^{I} par 2; ainsi on aura $y^{\text{I}} = 1$; donc, en rétrogradant toujours, on aura $\frac{q^{\text{I}}}{p} = 1$; donc $q^{\text{I}} = p$; donc l'équation

$$-12p^2 = (-12q + 41q^{\text{I}})^2 - 13q^{\text{I}2},$$

donnera $(-12q+41p)^2=p^2$; donc $-12q+41p=p$, c'est-à-dire $12q=40p$; donc $y=\frac{q}{p}=\frac{40}{12}=\frac{10}{3}$; mais comme il faut diviser la valeur de y par 2, on aura $y=\frac{5}{3}$; ce sera le côté de la racine de la formule proposée $7+15x+13x^2$; ainsi faisant cette quantité $=\frac{25}{9}$, on trouvera par la résolution de l'équation, $26x+15=\pm\frac{7}{3}$, d'où

$$x=-\frac{19}{39},\ \text{ou}\ =-\frac{2}{3}.$$

On auroit pu prendre aussi $-12q+41p=-p$, et l'on auroit eu $y=\frac{q}{p}=\frac{21}{6}$, et divisant par 2, $y=\frac{21}{12}$; faisant donc $7+15x+13x^2=\left(\frac{21}{12}\right)^2$, on trouvera $26x+15=\pm\frac{9}{2}$; donc

$$x=-\frac{21}{52},\ \text{ou}\ =-\frac{3}{4}.$$

Si on vouloit avoir d'autres valeurs de x, il n'y auroit qu'à chercher d'autres solutions de l'équation $r^2=3s^{\mathrm{II}2}+s^{\mathrm{I}2}$, laquelle est résoluble en général par les méthodes connues; mais on peut aussi, dès qu'on connoît une seule valeur de x, en déduire immédiatement toutes les autres valeurs satisfaisantes de x par la méthode expliquée dans le chapitre 4 du traité précédent.

REMARQUE

57. Supposons en général que la quantité $a+bx+cx^2$ devienne égale à un carré g^2, lorsque $x=f$, en sorte que l'on ait $a+bf+cf^2=g^2$; donc $a=g^2-bf-cf^2$; de sorte qu'en substituant cette valeur dans la formule proposée, elle deviendra

$$g^2+b(x-f)+c(x^2-f^2).$$

Qu'on prenne $g+m(x-f)$ pour la racine de cette quantité, m étant un nombre indéterminé, et l'on aura l'équation

$$g^2+b(x-f)+c(x^2-f^2)=g^2+2mg(x-f)+m^2(x-f)^2,$$

c'est-à-dire en effaçant g^2 de part et d'autre, et divisant ensuite par $x-f$,

$$b+c(x+f)=2mg+m^2(x-f);$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{fm^2-2gm+b+cf}{m^2-c}.$$

Et il est clair qu'à cause du nombre indéterminé m, cette expression de x doit renfermer toutes les valeurs qu'on peut donner à x, pour que la formule proposée devienne un carré; car quel que soit le nombre carré auquel cette formule peut être égale, il est visible que la racine de ce nombre pourra toujours être représentée par $g+m(x-f)$, en donnant à m une valeur convenable. Ainsi quand on aura trouvé par la méthode expliquée ci-dessus une seule valeur satisfaisante de x, il n'y aura qu'à la prendre pour f, et la racine du carré qui en résultera pour g; l'on aura, par la formule précédente, toutes les autres valeurs possibles de x.

Dans l'exemple précédent on a trouvé $y=\frac{5}{3}$ et $x=-\frac{2}{3}$; ainsi on fera $g=\frac{5}{3}$ et $f=-\frac{2}{3}$, et l'on aura

$$x=\frac{19-10m-2m^2}{3(m^2-13)},$$

c'est l'expression générale des valeurs rationnelles de x, qui peuvent rendre carrée la quantité $7+15x+13x^2$.

EXEMPLE II

58. *Soit encore proposé de trouver une valeur rationnelle de y, telle que*

$$23y^2-5$$

soit un carré.

Comme 23 et 5 ne sont divisibles par aucun nombre carré, il n'y aura aucune réduction à y faire. Ainsi en faisant $y=\frac{p}{q}$, il faudra que la formule $23p^2-5q^2$ devienne un carré z^2; de sorte qu'on aura l'équation

$$23p^2=z^2+5q^2.$$

On fera donc $z=nq-23q^{\mathrm{I}}$, et il faudra prendre pour n un nombre entier non $>\frac{23}{2}$, tel que n^2+5 soit divisible par 23. Je trouve $n=8$, ce qui donne $n^2+5=23\cdot 3$, et cette valeur de n est la seule qui ait les conditions requises. Substituant donc $8q-23q^{\mathrm{I}}$ à la place de z, et divisant toute l'équation par 23, j'aurai celle-ci,

$$p^2=3q^2-2\cdot 8qq^{\mathrm{I}}+23q^{\mathrm{I}2},$$

dans laquelle on voit que le coefficient 3 est déjà moindre que la valeur de B qui est 5, abstraction faite du signe.

Ainsi on multipliera toute l'équation par 3, et l'on aura

$$3p^2 = (3q - 8q^{\mathrm{I}})^2 + 5q^{\mathrm{I}2};$$

de sorte qu'en faisant $\frac{q^{\mathrm{I}}}{p} = y^{\mathrm{I}}$, il faudra que la formule $-5y^{\mathrm{I}2} + 3$ soit un carré, où les coefficiens 5 et 3 n'admettent aucune réduction.

Soit donc $y^{\mathrm{I}} = \frac{r}{s}$, ($r$ et s sont supposés premiers entr'eux, au lieu que q^{I} et p peuvent ne pas l'être), et l'on aura à rendre carrée la quantité $-5r^2 + 3s^2$; de sorte qu'en nommant la racine z^{I}, on aura $-5r^2 + 3s^2 = z^{\mathrm{I}2}$ et de-là

$$-5r^2 = z^{\mathrm{I}2} - 3s^2.$$

On prendra donc $z^{\mathrm{I}} = ms + 5s^{\mathrm{I}}$, et il faudra que m soit un nombre entier non $> \frac{5}{2}$, et tel que $m^2 - 3$ soit divisible par 5; or c'est ce qui est impossible, car on ne pourroit prendre que $m = 1$ ou 2, ce qui donne $m^2 - 3 = -2$ ou $= 1$. Ainsi on en doit conclure que le probleme n'est pas résoluble, c'est-à-dire qu'il est impossible que la formule $23y^2 - 5$ puisse jamais devenir égale à un nombre carré, quelque nombre que l'on substitue à la place de y.

COROLLAIRE

59. Si on avoit une équation quelconque du second degré à deux inconnues, telle que

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = 0,$$

et que l'on proposât de trouver des valeurs rationnelles de x et y qui satisfissent à cette équation, on y pourroit parvenir, lorsque cela est possible, par la méthode que nous venons d'exposer.

En effet, si on tire la valeur de y en x, on aura

$$2fy + ex + c = \sqrt{\left((c + ex)^2 - 4f(a + bx + dx^2)\right)},$$

ou bien en faisant $\alpha = c^2 - 4af$, $\beta = 2ce - 4bf$, $\gamma = e^2 - 4df$,

$$2fy + ex + c = \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)};$$

de sorte que la question sera réduite à trouver des valeurs de x qui rendent rationnel le radical $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$.

REMARQUE

60. Nous avons déjà traité ce même sujet, mais d'une maniere un peu différente, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin pour

l'année 1767[1]), et nous croyons être les premiers qui ayons donné une méthode directe et exempte de tâtonnement pour la solution des problemes indéterminés du second degré. Le Lecteur qui sera curieux d'approfondir cette matiere, pourra consulter les Mémoires cités, où il trouvera sur-tout des remarques nouvelles et importantes sur la recherche des nombres entiers qui, étant pris pour n, peuvent rendre $n^2 - B$ divisible par A, A et B étant des nombres donnés.

On trouvera aussi dans les Mémoires pour les années 1770[2]) et suivantes, des recherches sur la forme des diviseurs des nombres représentés par $z^2 - Bq^2$; de sorte que par la forme même du nombre A, on pourra juger souvent de l'impossibilité de l'équation $Ap^2 = z^2 - Bq^2$, où $Ay^2 + B =$ *à un carré,* (art. 52).[3])

---

1) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. II, p. 377. H. W.

2) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. II, p. 581. H. W.

3) Les éditions ultérieures contiennent l'addition suivante:

„LEGENDRE s'est occupé depuis, dans le Mémoire cité plus haut (art. 47), à chercher les conditions générales de la possibilité ou de l'impossibilité des équations indéterminées du second degré, et il est parvenu à ce théorème remarquable, que

L'équation $ax^2 + by^2 = cz^2$, *dans laquelle* a, b, c *sont positifs, premiers entre eux et dégagés de tout facteur carré, est résoluble, si l'on peut trouver trois entiers* λ, μ, ν, *tels que les trois quantités* $\frac{a\lambda^2 + b}{c}$, $\frac{c\mu^2 - b}{a}$, $\frac{c\nu^2 - a}{b}$ *soient des entiers.*" H. W.

PARAGRAPHE VI

SUR LES DOUBLES ET TRIPLES ÉGALITÉS

61. Nous traiterons ici en peu de mots des doubles et triples égalités, qui sont d'un usage très-fréquent dans l'analyse de DIOPHANTE, et pour la solution desquelles ce grand Géometre et ses Commentateurs ont cru devoir donner des regles particulieres.

Lorsqu'on a une formule contenant une ou plusieurs inconnues à égaler à une puissance parfaite, comme à un carré ou à un cube etc., cela s'appelle dans l'analyse de DIOPHANTE une égalité simple; et lorsqu'on a deux formules contenant la même ou les mêmes inconnues à égaler chacune à des puissances parfaites, cela s'appelle une égalité double, et ainsi de suite.

Jusqu'ici on a vu comment il faut résoudre les égalités simples où l'inconnue ne passe pas le second degré, et où la puissance proposée est la seconde, c'est-à-dire le carré.

Voyons donc comment on doit traiter les égalités doubles et triples de la même espece.

62. Soit d'abord proposée cette égalité doublée,

$$a + bx = \text{à un carré}$$
$$c + dx = \text{à un carré},$$

où l'inconnue x ne se trouve qu'au premier degré.

Faisant $a + bx = t^2$ et $c + dx = u^2$, et chassant x de ces deux équations, on aura $ad - bc = dt^2 - bu^2$; donc $dt^2 = bu^2 + ad - bc$, et

$$(dt)^2 = dbu^2 + (ad - bc)d;$$

de sorte que la difficulté sera réduite à trouver une valeur rationnelle de u, telle que $dbu^2 + ad^2 - bcd$ devienne un carré. On résoudra cette égalité simple par la méthode exposée ci-dessus, et connoissant ainsi u on aura $x = \frac{u^2 - c}{d}$.

Si l'égalité doublée étoit

$$ax^2 + bx = \textit{à un carré}$$
$$cx^2 + dx = \textit{à un carré},$$

il n'y auroit qu'à faire $x = \frac{1}{x^{\mathrm{I}}}$, et multiplier ensuite l'une et l'autre formule par le carré $x^{\mathrm{I}2}$, on auroit ces deux autres égalités

$$a + bx^{\mathrm{I}} = \textit{à un carré} \quad \text{et} \quad c + dx^{\mathrm{I}} = \textit{à un carré},$$

qui sont semblables aux précédentes.

Ainsi on peut résoudre en général toutes les égalités doubles où l'inconnue ne passe pas le premier degré, et celles où l'inconnue se trouve dans tous les termes, pourvu qu'elle ne passe pas le second degré; mais il n'en est pas de même lorsque l'on a des égalités de cette forme,

$$a + bx + cx^2 = \textit{à un carré}$$
$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \textit{à un carré}.$$

Si on résoud la premiere de ces égalités par notre méthode, et qu'on nomme f la valeur de x qui rend $a + bx + cx^2 =$ au carré g^2, on aura en général, (art. 57),

$$x = \frac{fm^2 - 2gm + b + cf}{m^2 - c};$$

donc substituant cette expression de x dans l'autre formule $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, et la multipliant ensuite par $(m^2 - c)^2$, on aura à résoudre l'égalité

$$\alpha(m^2 - c)^2 + \beta(m^2 - c)(fm^2 - 2gm + b + cf) + \gamma(fm^2 - 2gm + b + cf)^2 = \textit{à un carré},$$

dans laquelle l'inconnue m monte au quatrieme degré.

Or on n'a jusqu'à présent aucune regle générale pour résoudre ces sortes d'égalités, et tout ce qu'on peut faire, c'est de trouver successivement différentes solutions, lorsqu'on en connoît une seule. (Voyez le chapitre 9).

63. Si on avoit la triple égalité

$$\left.\begin{matrix} ax + by \\ cx + dy \\ hx + ky \end{matrix}\right\} = \textit{à un carré},$$

on feroit $ax+by=t^2$, $cx+dy=u^2$, et $hx+ky=s^2$, et chassant x et y de ces trois équations, on auroit celle-ci,

$$(ak-bh)u^2-(ck-dh)t^2=(ad-cb)s^2;$$

de sorte qu'en faisant $\frac{u}{t}=z$, la difficulté se réduiroit à résoudre l'égalité simple,

$$\frac{ak-bh}{ad-cb}z^2-\frac{ck-dh}{ad-cb}=\grave{a}\ un\ carr\acute{e},$$

laquelle est, comme l'on voit, dans le cas de notre méthode générale.

Ayant trouvé la valeur de z, on aura $u=tz$, et les deux premieres équations donneront

$$x=\frac{d-bz^2}{ad-cb}t^2,\quad y=\frac{az^2-c}{ad-cb}t^2.$$

Mais si la triple égalité proposée ne contenoit qu'une seule variable, on retomberoit alors dans une égalité où l'inconnue monteroit au quatrieme degré.

En effet, il est clair que ce cas peut se déduire du précédent, en faisant $y=1$; de sorte qu'il faudra que l'on ait $\frac{az^2-c}{ad-cb}t^2=1$, et par conséquent

$$\frac{az^2-c}{ad-cb}=\grave{a}\ un\ carr\acute{e}.$$

Or, nommant f une des valeurs de z qui peuvent satisfaire à l'égalité ci-dessus, et faisant, pour abréger, $\frac{ak-bh}{ad-cb}=e$, on aura en général, (art. 57),

$$z=\frac{fm^2-2gm+ef}{m^2-e}.$$

Donc, substituant cette valeur de z dans la derniere égalité, et la multipliant toute par le carré de m^2-e, on aura celle-ci,

$$\frac{a(fm^2-2gm+ef)^2-c(m^2-e)^2}{ad-cb}=\grave{a}\ un\ carr\acute{e},$$

où l'inconnue m monte, comme l'on voit, au quatrieme degré.

PARAGRAPHE VII

MÉTHODE DIRECTE ET GÉNÉRALE POUR TROUVER TOUTES LES VALEURS DE y EXPRIMÉES EN NOMBRES ENTIERS PAR LESQUELLES ON PEUT RENDRE RATIONNELLES LES QUANTITÉS DE LA FORME $\sqrt{(Ay^2+B)}$ A ET B ÉTANT DES NOMBRES ENTIERS DONNÉS ET POUR TROUVER AUSSI TOUTES LES SOLUTIONS POSSIBLES EN NOMBRES ENTIERS DES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU SECOND DEGRÉ A DEUX INCONNUES

ADDITION POUR LE CHAPITRE 6 [1])

64. Quoique par la méthode du § V on puisse trouver des formules générales qui renferment toutes les valeurs rationnelles de y, propres à rendre Ay^2+B égal à un carré, cependant ces formules ne sont d'aucun usage, lorsqu'on demande pour y des valeurs exprimées en nombres entiers; c'est pourquoi nous sommes obligés de donner ici une méthode particuliere pour résoudre la question dans le cas des nombres entiers.

Soit donc
$$Ay^2+B=x^2;$$
et comme A et B sont supposés des nombres entiers, et que y doit être aussi un nombre entier, il est clair que x devra être pareillement entier; de sorte qu'on aura à résoudre en entiers l'équation
$$x^2-Ay^2=B.$$

Je commence par remarquer ici que si B n'est divisible par aucun nombre carré, il faudra nécessairement que y soit premier à B; car suppo-

1) Voir p. 369. H. W.

sons, s'il est possible, que y et B aient une commune mesure α, en sorte que $y = \alpha y^{\mathrm{I}}$, et $B = \alpha B^{\mathrm{I}}$; donc on aura $x^2 - A\alpha^2 y^{\mathrm{I}2} = \alpha B^{\mathrm{I}}$, d'où il s'ensuit qu'il faudra que x^2 soit divisible par α; et comme α n'est ni carré ni divisible par aucun carré, (*hyp.*), à cause que α est facteur de B, il faudra que x soit divisible par α; faisant donc $x = \alpha x^{\mathrm{I}}$, on aura $\alpha^2 x^{\mathrm{I}2} = \alpha^2 A y^{\mathrm{I}2} + \alpha B^{\mathrm{I}}$, ou bien en divisant par α, $\alpha x^{\mathrm{I}2} = \alpha A y^{\mathrm{I}2} + B^{\mathrm{I}}$; d'où l'on voit que B^{I} devroit encore être divisible par α, ce qui est contre l'hypothese.

Ce n'est donc que lorsque B contient des facteurs carrés que y peut avoir une commune mesure avec B; et il est facile de voir par la démonstration précédente que cette commune mesure de y et de B ne peut être que la racine d'un des facteurs carrés de B, et que le nombre x devra avoir la même commune mesure; en sorte que toute l'équation sera divisible par le carré de ce commun diviseur de x, y et B.

De-là je conclus, 1°. que si B n'est divisible par aucun carré, y et B seront premiers entr'eux.

2°. Que si B est divisible par un seul carré α^2, y pourra être premier à B ou divisible par α, ce qui fait deux cas qu'il faudra examiner séparément; dans le premier cas on résoudra l'équation $x^2 - Ay^2 = B$, en supposant y et B premiers entr'eux; dans le second on aura à résoudre l'équation $x^2 - Ay^2 = B^{\mathrm{I}}$, B^{I} étant $= \frac{B}{\alpha^2}$, en supposant aussi y et B^{I} premiers entr'eux; mais il faudra ensuite multiplier par α les valeurs qu'on aura trouvées pour y et x, pour avoir les valeurs convenables à l'équation proposée.

3°. Que si B est divisible par deux différens carrés, α^2 et β^2, on aura trois cas à considérer; dans le premier on résoudra l'équation $x^2 - Ay^2 = B$, en regardant y et B comme premiers entr'eux; dans le second on résoudra de même l'équation $x^2 - Ay^2 = B^{\mathrm{I}}$, B^{I} étant $= \frac{B}{\alpha^2}$, dans l'hypothese de y et B^{I} premiers entr'eux, et on multipliera ensuite les valeurs de x et y par α; dans le troisieme on résoudra l'équation $x^2 - Ay^2 = B^{\mathrm{II}}$, B^{II} étant $= \frac{B}{\beta^2}$, dans l'hypothese de y et B^{II} premiers entr'eux, et on multipliera ensuite les valeurs de x et de y par β.

4°. etc. Ainsi on aura autant d'équations différentes à résoudre, qu'il y aura de différens diviseurs carrés de B; mais ces équations seront toutes de la même forme

$$x^2 - Ay^2 = B,$$

et y sera aussi toujours premier à B.

65. Considérons donc en général l'équation

$$x^2 - Ay^2 = B,$$

où y est premier à B; et comme x et y doivent être des nombres entiers, il faudra que $x^2 - Ay^2$ soit divisible par B.

On fera donc, suivant la méthode du § IV, art. 48, $x = ny - Bz$, et l'on aura l'équation

$$(n^2 - A)y^2 - 2nByz + B^2z^2 = B,$$

par laquelle on voit que le terme $(n^2 - A)y^2$ doit être divisible par B, puisque tous les autres le sont d'eux-mêmes; donc, comme y est premier à B, (*hyp.*), il faudra que $n^2 - A$ soit divisible par B; de sorte qu'en faisant $\frac{n^2 - A}{B} = C$, on aura, après avoir divisé par B,

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1;$$

or cette équation est plus simple que la proposée, en ce que le second membre est égal à l'unité.

On cherchera donc les valeurs de n qui peuvent rendre $n^2 - A$ divisible par B; pour cela il suffira, (art. 47), d'essayer pour n tous les nombres entiers positifs ou négatifs non $> \frac{B}{2}$; et si parmi ceux-ci on n'en trouve aucun qui satisfasse, on en conclura d'abord qu'il est impossible que $n^2 - A$ puisse être divisible par B, et qu'ainsi l'équation proposée n'est pas résoluble en nombres entiers.

Mais si on trouve de cette maniere un ou plusieurs nombres satisfaisans, on les prendra l'un après l'autre pour n, ce qui donnera autant de différentes équations qu'il faudra traiter séparément, et dont chacune pourra fournir une ou plusieurs solutions de la question proposée.

Quant aux valeurs de n qui surpasseroient celle de $\frac{B}{2}$, on en pourra faire abstraction, parce qu'elles ne donneroient point d'équations différentes de celles qui résulteront des valeurs de n qui ne sont pas $> \frac{B}{2}$, comme nous l'avons déjà montré dans l'art. 52.

Au reste, comme la condition par laquelle on doit déterminer n est que $n^2 - A$ soit divisible par B, il est clair que chaque valeur de n pourra être également positive ou négative; de sorte qu'il suffira d'essayer successivement pour n tous les nombres naturels qui ne sont pas plus grands que $\frac{B}{2}$, et de prendre ensuite les valeurs satisfaisantes de n tant en *plus* qu'en *moins*.

Nous avons donné ailleurs des regles pour faciliter la recherche des valeurs de n qui peuvent avoir la propriété requise, et même pour trouver ces valeurs *à priori* dans un grand nombre de cas. Voyez les Mémoires de Berlin pour l'année 1767, pages 194 et 274.[1])

Résolution de l'équation $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$ en nombres entiers

On peut résoudre cette équation par deux méthodes différentes que nous allons expliquer.

PREMIERE MÉTHODE

66. Comme les quantités C, n, B sont supposées des nombres entiers, de même que les indéterminées y et z, il est visible que la quantité

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2$$

sera toujours nécessairement égale à des nombres entiers; par conséquent l'unité sera la plus petite valeur qu'elle puisse recevoir, à moins qu'elle ne puisse devenir nulle, ce qui ne peut arriver que lorsque cette quantité peut se décomposer en deux facteurs rationnels; comme ce cas n'a aucune difficulté, nous en ferons d'abord abstraction, et la question se réduira à trouver les valeurs de y et z, qui rendront la quantité dont il s'agit la plus petite qu'il est possible; si le *minimum* est égal à l'unité, on aura la résolution de l'équation proposée, sinon on sera assuré qu'elle n'admet aucune solution en nombres entiers. Ainsi le probleme présent rentre dans le probleme III du § II, et est susceptible d'une solution semblable. Or, comme l'on a ici

$$(2n)^2 - 4BC = 4A,$$

(art. 65), il faudra distinguer deux cas, suivant que A sera positif ou négatif.

Premier Cas lorsque $n^2 - BC = A < 0$

67. Suivant la méthode de l'art. 32 il faudra réduire en fraction continue la fraction $\frac{n}{C}$, prise positivement; c'est ce qu'on exécutera par la regle de l'art. 4; ensuite on formera par les formules de l'art. 10 la série des fractions convergentes vers $\frac{n}{C}$, et il n'y aura plus qu'à essayer successivement les numérateurs de ces fractions pour le nombre y, et les dénominateurs correspon-

1) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. II, p. 377 et 655. H. W.

dans pour le nombre z; si la proposée est résoluble en nombres entiers, on trouvera de cette maniere les valeurs satisfaisantes de y et z; et réciproquement on sera assuré que la proposée n'admet aucune solution en nombres entiers, si parmi les nombres qu'on aura essayés il ne s'en trouve point de satisfaisans.

Second Cas lorsque $n^2 - BC = A > 0$

68. On fera usage ici de la méthode de l'art. 33 et suiv.; ainsi, à cause de $E = 4A$, on considérera d'abord la quantité, (art. 39),

$$a = \frac{n \pm \sqrt{A}}{C},$$

dans laquelle il faudra déterminer les signes tant de la valeur de n, que nous avons vu pouvoir être également positive et négative, que de $\sqrt{A}$, en sorte qu'elle devienne positive; ensuite on fera le calcul suivant:

$$\begin{array}{lll}
Q^0 = -n, & P^0 = C, & \mu < \dfrac{-Q^0 \pm \sqrt{A}}{P^0} \\
Q^{\mathrm{I}} = \mu P^0 + Q^0, & P^{\mathrm{I}} = \dfrac{Q^{\mathrm{I}2} - A}{P^0}, & \mu^{\mathrm{I}} < \dfrac{-Q^{\mathrm{I}} \mp \sqrt{A}}{P^{\mathrm{I}}} \\
Q^{\mathrm{II}} = \mu^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{I}} + Q^{\mathrm{I}}, & P^{\mathrm{II}} = \dfrac{Q^{\mathrm{II}2} - A}{P^{\mathrm{I}}}, & \mu^{\mathrm{II}} < \dfrac{-Q^{\mathrm{II}} \pm \sqrt{A}}{P^{\mathrm{II}}} \\
Q^{\mathrm{III}} = \mu^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{II}} + Q^{\mathrm{II}}, & P^{\mathrm{III}} = \dfrac{Q^{\mathrm{III}2} - A}{P^{\mathrm{II}}}, & \mu^{\mathrm{III}} < \dfrac{-Q^{\mathrm{III}} \mp \sqrt{A}}{P^{\mathrm{III}}} \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

et on continuera seulement ces séries jusqu'à ce que deux termes correspondans de la premiere et de la seconde série reparoissent ensemble; alors, si parmi les termes de la seconde série P^0, P^{I}, P^{II}, etc. il s'en trouve un égal à l'unité positive, ce terme donnera une solution de l'équation proposée, et les valeurs de y et z seront des termes correspondans des deux séries p^0, p^{I}, p^{II}, etc. et q^0, q^{I}, q^{II}, etc. calculées par les formules de l'art. 25; sinon on en conclura sur le champ que la proposée n'est pas résoluble en nombres entiers. (Voyez l'exemple de l'art. 40.)

Troisieme Cas lorsque $A =$ *à un carré*

69. Dans ce cas le nombre $\sqrt{A}$ deviendra rationnel, et la quantité

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2$$

pourra se décomposer en deux facteurs rationnels. En effet cette quantité n'est autre chose que celle-ci,

$$\frac{(Cy-nz)^2-Az^2}{C}$$

laquelle, en supposant $A=a^2$, peut se mettre sous cette forme,

$$\frac{(Cy\pm(n+a)z)(Cy\pm(n-a)z)}{C}.$$

Or, comme $n^2-a^2=BC=(n+a)(n-a)$, il faudra que le produit de $n+a$ par $n-a$ soit divisible par C, et par conséquent que l'un de ces deux nombres $n+a$ et $n-a$ soit divisible par un des facteurs de C, et l'autre par le facteur réciproque; supposons donc $C=bc$ et que $n+a=fb$, et $n-a=gc$, f et g étant des nombres entiers, et la quantité précédente deviendra le produit de ces deux facteurs linéaires, $cy\pm fz$ et $by\pm gz$; donc, puisque ces deux facteurs sont égaux à des nombres entiers, il est clair que leur produit ne sauroit être $=1$, comme l'équation proposée le demande, à moins que chacun d'eux ne soit en particulieur $=\pm1$; on fera donc

$$cy\pm fz=\pm1 \quad \text{et} \quad by\pm gz=\pm1,$$

et on déterminera par-là les nombres y et z; si ces nombres se trouvent entiers, on aura la solution de l'équation proposée, sinon elle sera insoluble au moins en nombres entiers.

SECONDE MÉTHODE

70. Qu'on pratique sur la formule

$$Cy^2-2nyz+Bz^2$$

des transformations semblables à celles dont nous avons fait usage plus haut, (art. 54), et je dis qu'on pourra toujours parvenir à une transformée, telle que

$$L\xi^2-2M\xi\psi+N\psi^2,$$

les nombres L, M, N étant des nombres entiers dépendans des nombres donnés C, B, n, en sorte que l'on ait

$$M^2-LN=n^2-CB=A,$$

et que de plus $2M$ ne soit pas plus grand, (abstraction faite des signes), que le nombre L, ni que le nombre N, les nombres ξ et ψ seront aussi des nombres entiers, mais dépendans des nombres indéterminés y et z.

En effet soit, par exemple, C moindre que B, et qu'on mette la formule dont il s'agit sous cette forme

$$B^{\mathrm{I}}y^2 - 2nyy^{\mathrm{I}} + By^{\mathrm{I}2},$$

en faisant $C = B^{\mathrm{I}}$ et $z = y^{\mathrm{I}}$; si $2n$ n'est pas plus grand que B^{I}, il est clair que cette formule aura déjà d'elle-même les conditions requises; mais si $2n$ est plus grand que B^{I}, alors on supposera $y = my^{\mathrm{I}} + y^{\mathrm{II}}$, et substituant on aura la transformée

$$B^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{I}2} - 2n^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{II}} + B^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{II}2},$$

où

$$n^{\mathrm{I}} = n - mB^{\mathrm{I}},$$

$$B^{\mathrm{II}} = m^2B^{\mathrm{I}} - 2mn + B = \frac{n^{\mathrm{I}2} - A}{B^{\mathrm{I}}}.$$

Or, comme le nombre m est indéterminé, on pourra, en le supposant entier, le prendre tel que le nombre $n - mB^{\mathrm{I}}$ ne soit pas plus grand que $\frac{1}{2}B^{\mathrm{I}}$; alors $2n^{\mathrm{I}}$ ne surpassera pas B^{I}. Ainsi, si $2n^{\mathrm{I}}$ ne surpasse pas non plus B^{II}, la transformée précédente sera déjà dans le cas qu'on a en vue; mais si $2n^{\mathrm{I}}$ est plus grand que B^{II}, on continuera alors à supposer $y^{\mathrm{I}} = m^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{III}}$, ce qui donnera la nouvelle transformée

$$B^{\mathrm{III}}y^{\mathrm{II}2} - 2n^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{III}} + B^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{III}2},$$

où

$$n^{\mathrm{II}} = n^{\mathrm{I}} - m^{\mathrm{I}}B^{\mathrm{II}},$$

$$B^{\mathrm{III}} = m^{\mathrm{I}2}B^{\mathrm{II}} - 2m^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{I}} + B^{\mathrm{I}} = \frac{n^{\mathrm{II}2} - A}{B^{\mathrm{II}}}.$$

On déterminera le nombre entier m^{I}, en sorte que $n^{\mathrm{I}} - m^{\mathrm{I}}B^{\mathrm{II}}$ ne soit pas plus grand que $\frac{B^{\mathrm{II}}}{2}$, moyennant quoi $2n^{\mathrm{II}}$ ne surpassera pas B^{II}; de sorte que l'on aura la transformée cherchée, si $2n^{\mathrm{II}}$ ne surpasse pas non plus B^{III}, mais si $2n^{\mathrm{II}}$ surpasse B^{III}, on supposera de nouveau $y^{\mathrm{II}} = m^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{III}} + y^{\mathrm{IV}}$, etc. etc.

Or il est visible que ces opérations ne peuvent pas aller à l'infini; car puisque $2n$ est plus grand que B^{I} et que $2n^{\mathrm{I}}$ ne l'est pas, il est clair que n^{I} sera moindre que n; de même $2n^{\mathrm{I}}$ est plus grand que B^{II}, et $2n^{\mathrm{II}}$ ne l'est pas; donc n^{II} sera moindre que n^{I}, et ainsi de suite; de sorte que les nombres n, n^{I}, n^{II}, etc. formeront une suite décroissante de nombres entiers, laquelle ne pourra par conséquent pas aller à l'infini. On parviendra donc nécessairement à une formule où le coefficient du terme moyen ne sera pas plus grand que ceux des deux termes extrêmes, et qui aura d'ailleurs les autres propriétés que nous avons énoncées ci-dessus; ce qui est évident par la nature même des transformations pratiquées.

Pour faciliter la transformation de la formule

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2$$

en celle-ci,

$$L\xi^2 - 2M\xi\psi + N\psi^2,$$

je désigne par D le plus grand des deux coefficiens extrêmes C et B, et par D^{I} l'autre coefficient; et, *vice versâ*, je désigne par θ la variable dont le carré se trouvera multiplié par D^{I} et par θ^{I} l'autre variable; en sorte que la formule proposée prenne cette forme

$$D^{\mathrm{I}}\theta^2 - 2n\theta\theta^{\mathrm{I}} + D\theta^{\mathrm{I}2},$$

où D^{I} soit moindre que D; ensuite je n'aurai qu'à faire le calcul suivant:

$$\begin{array}{llll}
m = \dfrac{n}{D^{\mathrm{I}}}, & n^{\mathrm{I}} = n - mD^{\mathrm{I}}, & D^{\mathrm{II}} = \dfrac{n^{\mathrm{I}2} - A}{D^{\mathrm{I}}}, & \theta = m\,\theta^{\mathrm{I}} + \theta^{\mathrm{II}} \\
m^{\mathrm{I}} = \dfrac{n^{\mathrm{I}}}{D^{\mathrm{II}}}, & n^{\mathrm{II}} = n^{\mathrm{I}} - m^{\mathrm{I}} D^{\mathrm{II}}, & D^{\mathrm{III}} = \dfrac{n^{\mathrm{II}2} - A}{D^{\mathrm{II}}}, & \theta^{\mathrm{I}} = m^{\mathrm{I}}\theta^{\mathrm{II}} + \theta^{\mathrm{III}} \\
m^{\mathrm{II}} = \dfrac{n^{\mathrm{II}}}{D^{\mathrm{III}}}, & n^{\mathrm{III}} = n^{\mathrm{II}} - m^{\mathrm{II}} D^{\mathrm{III}}, & D^{\mathrm{IV}} = \dfrac{n^{\mathrm{III}2} - A}{D^{\mathrm{III}}}, & \theta^{\mathrm{II}} = m^{\mathrm{II}}\theta^{\mathrm{III}} + \theta^{\mathrm{IV}}
\end{array}$$

etc. etc. etc.

où il faut bien remarquer que le signe $=$, qui est mis après les lettres m, m^{I}, m^{II}, etc. n'indique pas une égalité parfaite, mais seulement une égalité aussi approchée qu'il est possible, en tant qu'on n'entend par m, m^{I}, m^{II}, etc. que des nombres entiers. Je n'ai employé ce signe $=$ que faute d'un autre signe convenable.

Ces opérations doivent être continuées jusqu'à ce que dans la série n, n^{I}, n^{II}, etc. on trouve un terme comme n^{ϱ}, qui, (abstraction faite du signe), ne surpasse pas la moitié du terme correspondant D^{ϱ} de la série D^{I}, D^{II}, D^{III}, etc. non plus que la moitié du terme suivant $D^{\varrho+1}$. Alors on pourra faire $D^{\varrho} = L$, $n^{\varrho} = N$, $D^{\varrho+1} = M$, et $\theta^{\varrho} = \psi$, $\theta^{\varrho+1} = \xi$, ou bien $D^{\varrho} = M$, $D^{\varrho+1} = L$ et $\theta^{\varrho} = \xi$, $\theta^{\varrho+1} = \psi$. Nous supposerons toujours dans la suite qu'on ait pris pour M le plus petit des deux nombres D^{ϱ}, $D^{\varrho+1}$.

71. L'équation $Cy^2 - 2nyz + Dz^2 = 1$ sera donc réduite à celle-ci,

$$L\xi^2 - 2N\xi\psi + M\psi^2 = 1,$$

où $N^2 - LM = A$, et où $2N$ n'est ni $> L$ ni $> M$, (abstraction faite des signes). Or, M étant le plus petit des deux coefficiens L et M, qu'on multiplie toute l'équation par ce coefficient M, et faisant

$$v = M\psi - N\xi,$$

il est clair qu'elle se changera en celle-ci,

$$v^2 - A\xi^2 = M,$$

dans laquelle il faudra maintenant distinguer les deux cas de A positif et de A négatif.

Soit 1°. A négatif et $= -a$, a étant un nombre positif, l'équation sera donc

$$v^2 + a\xi^2 = M.$$

Or, comme $N^2 - LM = A$, on aura $a = LM - N^2$; d'où l'on voit d'abord que les nombres L et M doivent être de mêmes signes; d'ailleurs $2N$ ne doit être ni $> L$ ni $> M$; donc N^2 ne sera pas $> \frac{LM}{4}$; donc $a =$ ou $> \frac{3}{4}LM$; et puisque M est supposé moindre que L, ou au moins pas plus grand que L, on aura à plus forte raison $a =$ ou $> \frac{3}{4}M^2$; donc $M =$ ou $< \sqrt{\frac{4a}{3}}$; donc $M < \frac{4}{3}\sqrt{a}$.

On voit par-là que l'équation $v^2 + a\xi^2 = M$ ne sauroit subsister dans l'hypothese que v et ξ soient des nombres entiers, à moins que l'on ne fasse $\xi = 0$ et $v^2 = M$, ce qui demande que M soit un nombre carré.

Supposons donc $M = \mu^2$, et l'on aura $\xi = 0$, $v = \pm\mu$; donc par l'équation $v = M\psi - N\xi$, on aura $\mu^2\psi = \pm\mu$, et par conséquent $\psi = \pm\frac{1}{\mu}$; de sorte que ψ ne sauroit être un nombre entier, comme il le doit, (*hyp.*), à moins que μ ne soit égal à l'unité, soit $= \pm 1$, et par conséquent $M = 1$.

De-là je tire donc cette conséquence, que l'équation proposée ne sauroit être résoluble en nombres entiers, à moins que M ne se trouve égal à l'unité positive. Si cette condition a lieu, alors on fera $\xi = 0$, $\psi = \pm 1$, et on remontera de ces valeurs à celles de y et z.

Cette méthode revient pour le fond au même que celle de l'art. 67, mais elle a sur celle-là l'avantage de n'exiger aucun tâtonnement.

2°. Soit maintenant A un nombre positif, on aura $A = N^2 - LM$; or, comme N^2 ne peut pas être plus grand que $\frac{LM}{4}$, il est clair que l'équation ne pourra subsister, à moins que $-LM$ ne soit un nombre positif, c'est-à-dire que L et M ne soient de signes différens. Ainsi A sera nécessairement $< -LM$, ou tout au plus $= -LM$, si $N = 0$; de sorte qu'on aura $-LM =$ ou $< A$, et par conséquent $M^2 =$ ou $< A$, ou $M =$ ou $< \sqrt{A}$.

Le cas de $M = \sqrt{A}$ ne peut avoir lieu que lorsque A est un carré; par conséquent ce cas est très-facile à résoudre par la méthode donnée plus haut, (art. 69).

Reste donc le cas où A n'est pas carré, et dans lequel on aura nécessairement $M < \sqrt{A}$, (abstraction faite du signe de M); alors l'équation $v^2 - A\xi^2 = M$ sera dans le cas du théoreme de l'art. 38, et se résoudra par conséquent par la méthode que nous y avons indiquée.

Ainsi il n'y aura qu'à faire le calcul suivant,

$$\begin{array}{lll}
Q^0 = 0, & P^0 = 1, & \mu < \sqrt{A} \\
Q^{\text{I}} = \mu, & P^{\text{I}} = Q^{\text{I}2} - A, & \mu^{\text{I}} < \dfrac{-Q^{\text{I}} - \sqrt{A}}{P^{\text{I}}} \\
Q^{\text{II}} = \mu^{\text{I}} P^{\text{I}} + Q^{\text{I}}, & P^{\text{II}} = \dfrac{Q^{\text{II}2} - A}{P^{\text{I}}}, & \mu^{\text{II}} < \dfrac{-Q^{\text{II}} + \sqrt{A}}{P^{\text{II}}} \\
Q^{\text{III}} = \mu^{\text{II}} P^{\text{II}} + Q^{\text{II}}, & P^{\text{III}} = \dfrac{Q^{\text{III}2} - A}{P^{\text{II}}}, & \mu^{\text{III}} < \dfrac{-Q^{\text{III}} - \sqrt{A}}{P^{\text{III}}} \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

qu'on continuera jusqu'à ce que deux termes correspondans de la premiere et de la seconde série reparoissent ensemble, ou bien jusqu'à ce que dans la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. il se trouve un terme égal à l'unité positive, c'est-à-dire $= P^0$; car alors tous les termes suivans reviendront dans le même ordre dans chacune des trois séries, (art. 37). Si dans la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. il se trouve un terme égal à M, on aura la résolution de l'équation proposée; car il n'y aura qu'à prendre pour v et ξ les termes correspondans des séries p^{I}, p^{II}, p^{III}, etc. q^{I}, q^{II}, q^{III}, etc. calculées d'après les formules de l'art. 25; et même on pourra trouver une infinité de valeurs satisfaisantes de v et ξ, en continuant à l'infini les mêmes séries.

Or, dès qu'on connoîtra deux valeurs de v et ξ, on aura par l'équation $v = M\psi - N\xi$ celle de ψ, laquelle sera aussi toujours égale à un nombre entier; ensuite on pourra remonter de ces valeurs de ξ et ψ, c'est-à-dire de $\theta^{\varrho+1}$ et θ^{ϱ}, à celles de θ et θ^{I}, ou bien de y et z, (art. 70).

Mais si dans la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. il n'y a aucun terme qui soit $= M$, on en conclura hardiment que l'équation proposée n'admet aucune solution en nombres entiers.

Il est bon de remarquer que comme la série P^0, P^{I}, P^{II}, etc. ainsi que les deux autres, Q^0, Q^{I}, Q^{II}, etc. et μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. ne dépendent que du nombre A, le calcul une fois fait pour une valeur donnée de A servira pour toutes les équations où A, c'est-à-dire $n^2 - CB$, aura la même valeur; et c'est en quoi la méthode précédente est préférable à celle de l'art. 68, qui exige un nouveau calcul pour chaque équation.

Au reste, tant que A ne passera pas 100, on pourra faire usage de la table que nous avons donnée à l'art. 41, laquelle contient pour chaque radical $\sqrt{A}$ les valeurs des termes des deux séries P^0, $-P^{\mathrm{I}}$, P^{II}, $-P^{\mathrm{III}}$, etc. et μ, μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc. continuées jusqu'à ce que l'un des termes P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. devienne $= 1$, après quoi tous les termes suivans de l'une et de l'autre série reviennent dans le même ordre. De sorte qu'on pourra juger sur le champ, par le moyen de cette table, de la résolubilité de l'équation $v^2 - A\xi^2 = M$.

De la maniere de trouver toutes les solutions possibles de l'Équation $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$ *lorsqu'on n'en connoît qu'une seule*

72. Quoique par les méthodes que nous venons de donner on puisse trouver successivement toutes les solutions de cette équation, lorsqu'elle est résoluble en nombres entiers, cependant on peut parvenir à cet objet d'une maniere encore plus simple que voici:

Qu'on nomme p et q les valeurs trouvées de y et z, en sorte que l'on ait

$$Cp^2 - 2npq + Bq^2 = 1,$$

et qu'on prenne deux autres nombres entiers r et s, tels que $ps - qr = 1$, (ce qui est toujours possible, à cause que p et q sont nécessairement premiers entr'eux), qu'on suppose ensuite

$$y = pt + ru, \quad \text{et} \quad z = qt + su,$$

t et u étant deux nouvelles indéterminées; substituant ces expressions dans l'équation

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1,$$

et faisant pour abréger

$$P = Cp^2 - 2npq + Bq^2,$$
$$Q = Cpr - n(ps + qr) + Bqs,$$
$$R = Cr^2 - 2nrs + Bs^2,$$

on aura cette transformée,

$$Pt^2 + 2Qtu + Ru^2 = 1.$$

Or on a, (*hyp.*), $P = 1$; de plus, si on nomme ϱ et σ deux valeurs de r et s qui satisfassent à l'équation $ps - qr = 1$, on aura en général, (art. 42),

$$r = \varrho + mp, \quad s = \sigma + mq,$$

m étant un nombre quelconque entier; donc mettant ces valeurs dans l'expression de Q, elle deviendra

$$Q = Cp\varrho - n(p\sigma + q\varrho) + Bq\sigma + mP;$$

de sorte que, comme $P = 1$, on pourra rendre $Q = 0$, en prenant

$$m = - Cp\varrho + n(p\sigma + q\varrho) - Bq\sigma.$$

Maintenant je remarque que la valeur de $Q^2 - PR$ se réduit, (après les substitutions et les réductions), à celle-ci, $(n^2 - CB)(ps - qr)^2$; de sorte que, comme $ps - qr = 1$, on aura

$$Q^2 - PR = n^2 - CB = A;$$

donc faisant $P = 1$ et $Q = 0$, il viendra $-R = A$, savoir $R = -A$; ainsi l'équation transformée ci-dessus se changera en celle-ci,

$$t^2 - Au^2 = 1;$$

or, comme y, z, p, q, r et s sont par l'hypothese des nombres entiers, il est facile de voir que t et u seront aussi des nombres entiers; car, en tirant leurs valeurs des équations $y = pt + ru$ et $z = qt + su$, on a

$$t = \frac{sy - rz}{ps - qr}, \quad \text{et} \quad u = \frac{qy - pz}{qr - ps},$$

c'est-à-dire, à cause de $ps - qr = 1$,

$$t = sy - rz, \quad u = pz - qy.$$

Il n'y aura donc qu'à résoudre en nombres entiers l'équation

$$t^2 - Au^2 = 1,$$

et chaque valeur de t et de u donnera de nouvelles valeurs de y et z.

En effet, substituant dans les valeurs générales de r et s la valeur du nombre m trouvée ci-dessus, on aura

$$r = \varrho(1 - Cp^2) - Bpq\sigma + np(p\sigma + q\varrho),$$
$$s = \sigma(1 - Bq^2) - Cpq\varrho + nq(p\sigma + q\varrho),$$

ou bien, à cause de $Cp^2 - 2npq + Bq^2 = 1$,

$$r = (Bq - np)(q\varrho - p\sigma) = -Bq + np,$$
$$s = (Cp - nq)(p\sigma - q\varrho) = Cp - nq.$$

Donc mettant ces valeurs de r et s dans les expressions ci-dessus de y et z, on aura en général

$$y = pt - (Bq - np)u,$$
$$z = qt + (Cp - nq)u.$$

73. Tout se réduit donc à résoudre l'équation

$$t^2 - Au^2 = 1.$$

Or, 1°. si A est un nombre négatif, il est visible que cette équation ne sauroit subsister en nombres entiers, qu'en faisant $u = 0$ et $t = 1$, ce qui donneroit $y = p$ et $z = q$. D'où l'on peut conclure que dans le cas où A est un nombre négatif, l'équation proposée, $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$, ne peut jamais admettre qu'une seule solution en nombres entiers.

Il en seroit de même, si A étoit un nombre positif carré; car faisant $A = a^2$, on auroit $(t + au)(t - au) = 1$; donc $t + au = \pm 1$, et $t - au = \pm 1$; donc $2au = 0$; donc $u = 0$, et par conséquent $t = \pm 1$.

2°. Mais si A est un nombre positif non carré, alors l'équation $t^2 - Au^2 = 1$ est toujours susceptible d'une infinité de solutions en nombres entiers, (art. 37), qu'on peut trouver toutes par les formules données ci-dessus, (art. 71, n°. 2); mais il suffira de trouver les plus petites valeurs de t et u, et pour cela, dès que l'on sera parvenu, dans la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. à un terme égal à l'unité, il n'y aura qu'à calculer par les formules de l'art. 25 les termes correspondans des deux séries p^{I}, p^{II}, p^{III}, etc· et q^{I}, q^{II}, q^{III}, etc. ce seront les valeurs cherchées de t et u. D'où l'on voit que le même calcul qu'on aura fait pour la résolution de l'équation $v^2 - A\xi^2 = M$, servira aussi pour celle de l'équation $t^2 - Au^2 = 1$.

Au reste, tant que A ne passe pas 100, on a les plus petites valeurs de t et u toutes calculées dans la table qui est à la fin du chapitre 7 du traité précédent et dans laquelle les nombres a, m, n sont les mêmes que ceux que nous appelons ici A, t et u.

74. Désignons par t^{I}, u^{I} les plus petites valeurs de t, u dans l'équation $t^2 - Au^2 = 1$; et de même que ces valeurs peuvent servir à trouver de nouvelles valeurs de y et z dans l'équation $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$, de même aussi elles pourront servir à trouver de nouvelles valeurs de t et u dans l'équation $t^2 - Au^2 = 1$, qui n'est qu'un cas particulier de celle-là. Pour cela il n'y aura qu'à supposer $C = 1$ et $n = 0$, ce qui donne $-B = A$, et prendre ensuite t, u à la place de y, z, et t^{I}, u^{I} à la place de p, q. Faisant donc ces substitutions dans les expressions générales de y et z de l'art. 72, et mettant de plus T, V à la place de t, u, on aura en général

$$t = Tt^{\mathrm{I}} + AVu^{\mathrm{I}},$$
$$u = Tu^{\mathrm{I}} + Vt^{\mathrm{I}},$$

et pour la détermination de T et V l'équation $T^2 - AV^2 = 1$, qui est semblable à la proposée.

Ainsi on pourra supposer $T = t^{\mathrm{I}}$, et $V = u^{\mathrm{I}}$, ce qui donnera

$$t = t^{\mathrm{I}2} + Au^{\mathrm{I}2}, \quad u = t^{\mathrm{I}}u^{\mathrm{I}} + t^{\mathrm{I}}u^{\mathrm{I}}.$$

Nommant donc t^{II}, u^{II} les secondes valeurs de t et u, on aura

$$t^{\mathrm{II}} = t^{\mathrm{I}2} + Au^{\mathrm{I}2}, \quad u^{\mathrm{II}} = 2t^{\mathrm{I}}u^{\mathrm{I}}.$$

Maintenant il est clair qu'on peut prendre ces nouvelles valeurs t^{II}, u^{II} à la place des premieres t^{I}, u^{I}; ainsi l'on aura

$$t = Tt^{\mathrm{II}} + AVu^{\mathrm{II}},$$
$$u = Tu^{\mathrm{II}} + Vt^{\mathrm{II}},$$

où l'on peut supposer de nouveau $T = t^{\text{I}}$, $V = u^{\text{I}}$, ce qui donnera

$$t = t^{\text{I}}t^{\text{II}} + Au^{\text{I}}u^{\text{II}}, \quad u = t^{\text{I}}u^{\text{II}} + u^{\text{I}}t^{\text{II}}.$$

Ainsi on aura de nouvelles valeurs de t et u, lesquelles seront

$$\begin{aligned} t^{\text{III}} &= t^{\text{I}}t^{\text{II}} + Au^{\text{I}}u^{\text{II}} = t^{\text{I}}(t^{\text{I}2} + 3Au^{\text{I}2}), \\ u^{\text{III}} &= t^{\text{I}}u^{\text{II}} + u^{\text{I}}t^{\text{II}} \quad = u^{\text{I}}(3t^{\text{I}2} + Au^{\text{I}2}), \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

75. La méthode précédente ne fait trouver que successivement les valeurs t^{II}, t^{III}, etc. u^{II}, u^{III}, etc. voyons maintenant comment on peut généraliser cette recherche. On a d'abord

$$t = Tt^{\text{I}} + AVu^{\text{I}}, \quad u = Tu^{\text{I}} + Vt^{\text{I}};$$

d'où je tire cette combinaison,

$$t \pm u\sqrt{A} = (t^{\text{I}} \pm u^{\text{I}}\sqrt{A})(T \pm V\sqrt{A});$$

donc supposant $T = t^{\text{I}}$ et $V = u^{\text{I}}$, on aura

$$t^{\text{II}} \pm u^{\text{II}}\sqrt{A} = (t^{\text{I}} \pm u^{\text{I}}\sqrt{A})^2.$$

Qu'on mette à présent ces valeurs de t^{II} et u^{II} à la place de celles de t^{I} et u^{I}, l'on aura

$$t \pm u\sqrt{A} = (t^{\text{I}} \pm u^{\text{I}}\sqrt{A})^2(T \pm V\sqrt{A}),$$

où faisant de nouveau $T = t^{\text{I}}$ et $V = u^{\text{I}}$, et nommant t^{III}, u^{III} les valeurs résultantes de t et u, il viendra

$$t^{\text{III}} \pm u^{\text{III}}\sqrt{A} = (t^{\text{I}} \pm u^{\text{I}}\sqrt{A})^3.$$

On trouvera de même

$$t^{\text{IV}} \pm u^{\text{IV}}\sqrt{A} = (t^{\text{I}} \pm u^{\text{I}}\sqrt{A})^4,$$

et ainsi de suite.

Donc, si pour plus de simplicité on nomme maintenant T et V les premieres et plus petites valeurs de t, u, que nous avons nommées ci-dessus t^{I}, u^{I}, on aura en général

$$t \pm u\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^m,$$

m étant un nombre quelconque entier positif; d'où l'on tire à cause de l'ambiguité des signes

$$t = \frac{(T+V\sqrt{A})^m + (T-V\sqrt{A})^m}{2}$$

$$u = \frac{(T+V\sqrt{A})^m - (T-V\sqrt{A})^m}{2\sqrt{A}}.$$

Quoique ces expressions paroissent sous une forme irrationnelle, cependant il est aisé de voir qu'elles deviendront rationnelles, en développant les puissances de $T \pm V\sqrt{A}$; car on a, comme l'on sait,

$$(T \pm V\sqrt{A})^m = T^m \pm mT^{m-1}V\sqrt{A} + \frac{m(m-1)}{2}T^{m-2}V^2A$$
$$\pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}T^{m-3}V^3A\sqrt{A} +, \text{ etc.}$$

Donc

$$t = T^m + \frac{m(m-1)}{2}AT^{m-2}V^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4}A^2T^{m-4}V^4 +, \text{ etc.}$$

$$u = mT^{m-1}V + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}AT^{m-3}V^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^2T^{m-5}V^5 +, \text{ etc.}$$

où l'on pourra prendre pour m des nombres quelconques entiers positifs.

Il est clair qu'en faisant successivement $m = 1, 2, 3, 4$, etc. on aura des valeurs de t et u, qui iront en augmentant.

Or je vais prouver que l'on aura de cette maniere toutes les valeurs possibles de t et u, pourvu que T et V en soient les plus petites. Pour cela il suffit de prouver qu'entre les valeurs de t et u qui répondent à un nombre quelconque m, et celles qui répondroient au nombre suivant $m+1$, il est impossible qu'il se trouve des valeurs intermédiaires qui puissent satisfaire à l'équation $t^2 - Au^2 = 1$.

Prenons, par exemple, les valeurs t^{III}, u^{III}, qui résultent de la supposition de $m = 3$, et les valeurs t^{IV}, u^{IV}, qui résultent de la supposition $m = 4$, et soient, s'il est possible, d'autres valeurs intermédiaires θ et v, qui satisfassent aussi à l'équation $t^2 - Au^2 = 1$.

Puisque l'on a $t^{\text{III}\,2} - Au^{\text{III}\,2} = 1$, $t^{\text{IV}\,2} - Au^{\text{IV}\,2} = 1$ et $\theta^2 - Av^2 = 1$, on aura

$$\theta^2 - t^{\text{III}\,2} = A(v^2 - u^{\text{III}\,2}), \quad \text{et} \quad t^{\text{IV}\,2} - \theta^2 = A(u^{\text{IV}\,2} - v^2),$$

d'où l'on voit que si $\theta > t^{\text{III}}$ et $< t^{\text{IV}}$, on aura aussi $v > u^{\text{III}}$ et $< u^{\text{IV}}$. De plus on aura aussi ces autres valeurs de t et u, savoir

$$t = \theta t^{\text{IV}} - Avu^{\text{IV}}, \quad u = \theta u^{\text{IV}} - vt^{\text{IV}},$$

qui satisferont à la même équation $t^2 - Au^2 = 1$; car en les y substituant, on auroit

$$(\theta t^{\text{IV}} - Avu^{\text{IV}})^2 - A(vt^{\text{IV}} - \theta u^{\text{IV}})^2 = (\theta^2 - Av^2)(t^{\text{IV}\,2} - Au^{\text{IV}\,2}) = 1,$$

équation identique, à cause de $\theta^2 - Av^2 = 1$, et $t^{\text{IV}\,2} - Au^{\text{IV}\,2} = 1$, (*hyp.*). Or ces deux dernieres équations donnent

$$\theta - v\sqrt{A} = \frac{1}{\theta + v\sqrt{A}}, \quad \text{et} \quad t^{\text{IV}} - u^{\text{IV}}\sqrt{A} = \frac{1}{t^{\text{IV}} + u^{\text{IV}}\sqrt{A}};$$

donc mettant, dans l'expression de $u = \theta u^{\text{IV}} - vt^{\text{IV}}$, à la place de θ, $v\sqrt{A} + \frac{1}{\theta + v\sqrt{A}}$, et à la place de t^{IV}, $u^{\text{IV}}\sqrt{A} + \frac{1}{t^{\text{IV}} + u^{\text{IV}}\sqrt{A}}$, on aura

$$u = \frac{u^{\text{IV}}}{\theta + v\sqrt{A}} - \frac{v}{t^{\text{IV}} + u^{\text{IV}}\sqrt{A}};$$

de même, si on considere la quantité $t^{\text{III}}u^{\text{IV}} - u^{\text{III}}t^{\text{IV}}$, elle pourra aussi, à cause de $t^{\text{III}\,2} - Au^{\text{III}\,2} = 1$, se mettre sous la forme

$$\frac{u^{\text{IV}}}{t^{\text{III}} + u^{\text{III}}\sqrt{A}} - \frac{u^{\text{III}}}{t^{\text{IV}} + u^{\text{IV}}\sqrt{A}}.$$

Or, il est facile de voir que la quantité précédente doit être plus petite que celle-ci, à cause de $\theta > t^{\text{III}}$ et $v > u^{\text{III}}$; donc on aura une valeur de u, qui sera moindre que la quantité $t^{\text{III}}u^{\text{IV}} - u^{\text{III}}t^{\text{IV}}$; mais cette quantité est égale à V; car

$$t^{\text{III}} = \frac{(T + V\sqrt{A})^3 + (T - V\sqrt{A})^3}{2}, \qquad u^{\text{III}} = \frac{(T + V\sqrt{A})^3 - (T - V\sqrt{A})^3}{2\sqrt{A}},$$

$$t^{\text{IV}} = \frac{(T + V\sqrt{A})^4 + (T - V\sqrt{A})^4}{2}, \qquad u^{\text{IV}} = \frac{(T + V\sqrt{A})^4 - (T - V\sqrt{A})^4}{2\sqrt{A}},$$

d'où

$$t^{\text{III}}u^{\text{IV}} - t^{\text{IV}}u^{\text{III}} = \frac{(T - V\sqrt{A})^3(T + V\sqrt{A})^4 - (T - V\sqrt{A})^4(T + V\sqrt{A})^3}{2\sqrt{A}};$$

de plus

$$(T - V\sqrt{A})^3 (T + V\sqrt{A})^3 = (T^2 - A V^2)^3 = 1,$$

puisque $T^2 - A V^2 = 1$, (*hyp.*); donc

$$(T - V\sqrt{A})^3 (T + V\sqrt{A})^4 = T + V\sqrt{A},$$

et

$$(T - V\sqrt{A})^4 (T + V\sqrt{A})^3 = T - V\sqrt{A};$$

de sorte que la valeur de $t^{\text{III}}u^{\text{IV}} - u^{\text{III}}t^{\text{IV}}$ se réduira à $\frac{2V\sqrt{A}}{2\sqrt{A}} = V$.

Il s'ensuivroit donc de-là qu'on auroit une valeur de $u < V$, ce qui est contre l'hypothese, puisque V est supposé la plus petite valeur possible de u. Donc il ne sauroit y avoir des valeurs de t et u intermédiaires entre celles-ci, t^{III}, t^{IV} et u^{III}, u^{IV}. Et comme ce raisonnement peut s'appliquer en général à toutes valeurs de t et u qui résulteroient des formules ci-dessus, en y faisant m égal à un nombre entier quelconque, on en peut conclure que ces formules renferment effectivement toutes les valeurs possibles de t et u.

Au reste, il est inutile de remarquer que les valeurs de t et de u peuvent être également positives ou négatives; car cela est visible par l'équation même $t^2 - Au^2 = 1$.

De la maniere de trouver toutes les solutions possibles en nombres entiers des Équations indéterminées du second degré à deux inconnues

76. Les méthodes que nous venons d'exposer suffisent pour la résolution complette des équations de la forme $Ay^2 + B = x^2$; mais il peut arriver qu'on ait à résoudre des équations du second degré d'une forme plus composée; c'est pourquoi nous croyons devoir montrer comment il faudra s'y prendre.

Soit proposée l'équation

$$ar^2 + brs + cs^2 + dr + es + f = 0,$$

où a, b, c, d, e, f soient des nombres entiers donnés, et où r et s soient deux inconnues qui doivent être aussi des nombres entiers.

J'aurai d'abord, par la résolution ordinaire,

$$2ar + bs + d = \sqrt{(bs+d)^2 - 4a(cs^2 + es + f)},$$

d'où l'on voit que la difficulté se réduit à faire en sorte que

$$(bs+d)^2 - 4a(cs^2 + es + f)$$

soit un carré.

Supposons pour plus de simplicité

$$b^2 - 4ac = A,$$
$$bd - 2ae = g,$$
$$d^2 - 4af = h,$$

et il faudra que $As^2 + 2gs + h$ soit un carré; supposons ce carré $= y^2$, en sorte que l'on ait l'équation

$$As^2 + 2gs + h = y^2,$$

et tirant la valeur de s, on aura

$$As + g = \sqrt{(Ay^2 + g^2 - Ah)};$$

de sorte qu'il ne s'agira plus que de rendre carrée la formule $Ay^2 + g^2 - Ah$.

Donc, si on fait encore

$$g^2 - Ah = B,$$

on aura à rendre rationnel le radical

$$\sqrt{(Ay^2 + B)};$$

c'est à quoi on parviendra par les méthodes données.

Soit $\sqrt{(Ay^2 + B)} = x$, en sorte que l'équation à résoudre soit

$$Ay^2 + B = x^2,$$

l'on aura donc $As + g = \pm x$; d'ailleurs on a déjà $2ar + bs + d = \pm y$; ainsi dès qu'on aura trouvé les valeurs de x et y, on aura celles de r et s par les deux équations

$$s = \frac{\pm x - g}{A}, \quad r = \frac{\pm y - d - bs}{2a}.$$

Or, comme r et s doivent être des nombres entiers, il est visible qu'il faudra 1°. que x et y soient des nombres entiers aussi; 2°. que $\pm x - g$ soit divisible par A, et qu'ensuite $\pm y - d - bs$ le soit par $2a$. Ainsi, après avoir trouvé toutes les valeurs possibles de x et y en nombres entiers, il restera encore à trouver parmi ces valeurs celles qui pourront rendre r et s des nombres entiers.

Si A est un nombre négatif ou un nombre positif carré, nous avons vu que le nombre des solutions possibles en nombres entiers est toujours limité; de sorte que dans ces cas il n'y aura qu'à essayer successivement pour x et y les valeurs trouvées, et si l'on n'en rencontre aucune qui donne pour r et s des nombres entiers, on en conclura que l'équation proposée n'admet point de solution de cette espece.

La difficulté ne tombe donc que sur le cas où A est un nombre positif non carré, cas dans lequel on a vu que le nombre des solutions possibles en entiers peut être infini; comme l'on auroit dans ce cas un nombre infini de valeurs à essayer, on ne pourroit jamais bien juger de la résolubilité de l'équation proposée, à moins d'avoir une regle qui réduise le tâtonnement entre certaines limites; c'est ce que nous allons rechercher.

77. Puisqu'on a, (art. 65),

$$x = ny - Bz,$$

et, (art. 72),

$$y = pt - (Bq - np)u, \quad \text{et} \quad z = qt + (Cp - nq)u,$$

il est facile de voir que les expressions générales de r et s seront de cette forme,

$$r = \frac{\alpha t + \beta u + \gamma}{\delta}, \quad s = \frac{\alpha^{\mathrm{I}} t + \beta^{\mathrm{I}} u + \gamma^{\mathrm{I}}}{\delta^{\mathrm{I}}},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha^{\mathrm{I}}, \beta^{\mathrm{I}}, \gamma^{\mathrm{I}}, \delta^{\mathrm{I}}$ étant des nombres entiers connus, et t, u étant donnés par les formules de l'art. 75, dans lesquelles l'exposant m peut être un nombre entier positif quelconque; ainsi la question se réduit à trouver quelle valeur on doit donner à m, pour que les valeurs de r et s soient des nombres entiers.

78. Je remarque d'abord qu'il est toujours possible de trouver une valeur de u qui soit divisible par un nombre quelconque donné Δ; car supposant $u = \Delta\omega$, l'équation $t^2 - Au^2 = 1$ deviendra $t^2 - A\Delta^2\omega^2 = 1$, laquelle est toujours résoluble en nombres entiers; et l'on trouvera les plus petites valeurs de t et ω, en faisant le même calcul qu'auparavant, mais en prenant $A\Delta^2$ à

la place de A; or, comme ces valeurs satisfont aussi à l'équation $t^2 - Au^2 = 1$, elles seront nécessairement renfermées dans les formules de l'art. 75. Ainsi il y aura nécessairement une valeur de m qui rendra l'expression de u divisible par Δ.

Qu'on dénote cette valeur de m par μ, et je dis que si dans les expressions générales de t et u de l'article cité on fait $m = 2\mu$, la valeur de u sera divisible par Δ, et celle de t étant divisée par Δ donnera 1 pour reste.

Car si on désigne par T^{I} et V^{I} les valeurs de t et u, où $m = \mu$, et par T^{II} et V^{II} celles où $m = 2\mu$, on aura, (art. 75),

$$T^{\mathrm{I}} \pm V^{\mathrm{I}}\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{\mu}, \quad \text{et} \quad T^{\mathrm{II}} \pm V^{\mathrm{II}}\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{2\mu};$$

donc

$$(T^{\mathrm{I}} \pm V^{\mathrm{I}}\sqrt{A})^2 = T^{\mathrm{II}} \pm V^{\mathrm{II}}\sqrt{A},$$

c'est-à-dire en comparant la partie rationnelle du premier membre avec la rationnelle du second, et l'irrationnelle avec l'irrationnelle,

$$T^{\mathrm{II}} = T^{\mathrm{I}2} + AV^{\mathrm{I}2}, \quad \text{et} \quad V^{\mathrm{II}} = 2T^{\mathrm{I}}V^{\mathrm{I}};$$

donc, puisque V^{I} est divisible par Δ, V^{II} le sera aussi, et T^{II} laissera le même reste que laisseroit $T^{\mathrm{I}2}$; mais on a $T^{\mathrm{I}2} - AV^{\mathrm{I}2} = 1$, (*hyp.*), donc $T^{\mathrm{I}2} - 1$ doit être divisible par Δ et même par Δ^2, puisque $V^{\mathrm{I}2}$ l'est déjà; donc $T^{\mathrm{I}2}$ et par conséquent aussi T^{II} étant divisé par Δ, laissera le reste 1.

Maintenant je dis que les valeurs de t et u qui répondent à un exposant quelconque m, étant divisées par Δ, laisseront les mêmes restes que les valeurs de t et u, qui répondroient à l'exposant $m + 2\mu$. Car désignant ces dernieres par θ et v, on aura

$$t \pm u\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^m, \quad \text{et} \quad \theta \pm v\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{m+2\mu};$$

donc

$$\theta \pm v\sqrt{A} = (t \pm u\sqrt{A})(T \pm V\sqrt{A})^{2\mu};$$

mais nous venons de trouver ci-dessus

$$T^{\mathrm{II}} \pm V^{\mathrm{II}}\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{2\mu};$$

donc on aura

$$\theta \pm v\sqrt{A} = (t \pm u\sqrt{A})(T^{\mathrm{II}} \pm V^{\mathrm{II}}\sqrt{A}),$$

d'où l'on tire, en faisant la multiplication et comparant ensuite les parties rationnelles ensemble et les irrationnelles ensemble,

$$\theta = tT^{\text{II}} + AuV^{\text{II}}, \quad v = tV^{\text{II}} + uT^{\text{II}}.$$

Or V^{II} est divisible par $\varDelta$, et T^{II} laisse le reste 1; donc θ laissera le même reste que t, et v le même reste que u.

Donc en général les restes des valeurs de t et u répondantes aux exposans $m+2\mu$, $m+4\mu$, $m+6\mu$, etc. seront les mêmes que ceux des valeurs qui répondent à l'exposant quelconque m.

De-là on peut donc conclure que si l'on veut avoir les restes provenans de la division des termes t^{I}, t^{II}, t^{III}, etc. et u^{I}, u^{II}, u^{III}, etc. qui répondent à $m = 1, 2, 3$, etc. par le nombre $\varDelta$, il suffira de trouver ces restes jusqu'aux termes $t^{2\mu}$ et $u^{2\mu}$ inclusivement; car, après ces termes, les mêmes restes reviendront dans le même ordre, et ainsi de suite à l'infini.

Quant aux termes $t^{2\mu}$ et $u^{2\mu}$, auxquels on pourra s'arrêter, ce seront ceux dont l'un $u^{2\mu}$ sera exactement divisible par $\varDelta$, et dont l'autre $t^{2\mu}$ laissera l'unité pour reste; ainsi il n'y aura qu'à pousser les divisions jusqu'à ce qu'on parvienne aux restes 1 et 0; alors on sera assuré que les termes suivans redonneront toujours les mêmes restes que l'on a déjà trouvés.

On pourroit aussi trouver l'exposant 2μ *à priori;* car il n'y auroit qu'à faire le calcul indiqué dans l'art. 71, n°. 2, premierement pour le nombre A, et ensuite pour le nombre $A\varDelta^2$; et si on nomme π le numéro du terme de la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. qui dans le premier cas sera $=1$, et ϱ le numéro du terme qui sera $=1$ dans le second cas, on n'aura qu'à chercher le plus petit multiple de π et de ϱ, lequel étant divisé par π, donnera la valeur cherchée de μ.

Ainsi si l'on a, par exemple, $A = 6$ et $\varDelta = 3$, on trouvera dans la table de l'art. 41 pour le radical $\sqrt{6}$,

$$P^0 = 1, \quad P^{\text{I}} = -2, \quad P^{\text{II}} = 1;$$

donc $\pi = 2$; ensuite on trouvera dans la même table pour le radical $\sqrt{(6 \cdot 9)} = \sqrt{54}$,

$$P^0 = 1, \quad P^{\text{I}} = -5, \quad P^{\text{II}} = 9, \quad P^{\text{III}} = -2, \quad P^{\text{IV}} = 9, \quad P^{\text{V}} = -5, \quad P^{\text{VI}} = 1;$$

donc $\varrho = 6$; or le plus petit multiple de 2 et 6 est 6, qui étant divisé par 2 donne 3 pour quotient, de sorte qu'on aura ici $\mu = 3$ et $2\mu = 6$.

Donc, pour avoir dans ce cas tous les restes de la division des termes t^{I}, t^{II}, t^{III}, etc. et u^{I}, u^{II}, u^{III}, etc. par 3, il suffira de chercher ceux des six premiers termes de l'une et de l'autre série; car les termes suivans redonneront toujours les mêmes restes, c'est-à-dire que les septiemes termes donneront les mêmes restes que les premiers, les huitiemes les mêmes restes que les seconds, et ainsi de suite à l'infini.

Au reste, il peut arriver quelquefois que les termes t^{μ} et u^{μ} aient les mêmes propriétés que les termes $t^{2\mu}$ et $u^{2\mu}$, c'est-à-dire que u^{μ} soit divisible par Δ, et que t^{μ} laisse l'unité pour reste. Dans ces cas on pourra s'arrêter à ces mêmes termes; car les restes des termes suivans $t^{\mu+1}$, $t^{\mu+2}$, etc. $u^{\mu+1}$, $u^{\mu+2}$, etc. seront les mêmes que ceux des termes t^{I}, t^{II}, etc. u^{I}, u^{II}, etc. et ainsi des autres.

En général nous désignerons par M la plus petite valeur de l'exposant m, qui rendra $t-1$ et u divisibles par Δ.

79. Supposons maintenant que l'on ait une expression quelconque composée de t et u et de nombres entiers donnés, de maniere qu'elle représente toujours des nombres entiers, et qu'il s'agisse de trouver les valeurs qu'il faudroit donner à l'exposant m, pour que cette expression devienne divisible par un nombre quelconque donné Δ, il n'y aura qu'à faire successivement $m = 1, 2, 3$, etc. jusqu'à M; et si aucune de ces suppositions ne rend l'expression proposée divisible par Δ, on en conclura hardiment qu'elle ne peut jamais le devenir, quelques valeurs qu'on donne à m.

Mais si l'on trouve de cette maniere une ou plusieurs valeurs de m qui rendent la proposée divisible par Δ, alors nommant N chacune de ces valeurs, toutes les valeurs possibles de m qui pourront faire le même effet, seront N, $N+M$, $N+2M$, $N+3M$, etc. et en général $N+\lambda M$, λ étant un nombre entier quelconque.

De même, si l'on avoit une autre expression composée de même de t, u et de nombres entiers donnés, laquelle dût être en même temps divisible par un autre nombre quelconque donné Δ^{I}, on chercheroit pareillement les valeurs convenables de M et de N, que nous désignerons ici par M^{I} et N^{I}, et toutes les valeurs de l'exposant m qui pourront satisfaire à la condition proposée seront renfermées dans la formule $N^{\mathrm{I}}+\lambda^{\mathrm{I}}M^{\mathrm{I}}$, λ^{I} étant un nombre quelconque entier. Ainsi il n'y aura plus qu'à chercher les valeurs qu'on doit donner aux nombres entiers λ et λ^{I}, pour que l'on ait $N+\lambda M = N^{\mathrm{I}}+\lambda^{\mathrm{I}}M^{\mathrm{I}}$,

savoir
$$M\lambda - M^{\text{I}}\lambda^{\text{I}} = N^{\text{I}} - N,$$
équation résoluble par la méthode de l'art. 42.

Il est maintenant aisé de faire l'application de ce que nous venons de dire au cas de l'art. 77, où les expressions proposées sont de la forme $\alpha t + \beta u + \gamma$, $\alpha^{\text{I}} t + \beta^{\text{I}} u + \gamma^{\text{I}}$, et les diviseurs sont δ et δ^{I}.

Il faudra seulement se souvenir de prendre les nombres t et u successivement en *plus* et en *moins*, pour avoir tous les cas possibles.

REMARQUE[1])

80. Si l'équation proposée à résoudre en nombres entiers étoit de la forme
$$ar^2 + 2brs + cs^2 = f,$$
on y pourroit appliquer immédiatement la méthode de l'art. 65; car 1°. il est visible que r et s ne pourroient avoir un commun diviseur, à moins que le nombre f ne fût en même temps divisible par le carré de ce diviseur; de sorte qu'on pourra toujours réduire la question au cas où r et s seront premiers entr'eux. 2°. On voit aussi que s et f ne pourroient avoir un commun diviseur, à moins que ce diviseur n'en fût un aussi du nombre a, en supposant r premier à s; ainsi on pourra réduire encore la question au cas où s et f seront premiers entr'eux. (Voyez l'art. 64).

Or, s étant supposé premier à f et à r, on pourra faire $r = ns - fz$, et il faudra, pour que l'équation soit résoluble en nombres entiers, qu'il y ait une valeur de n positive ou négative pas plus grande que $\frac{f}{2}$, laquelle rende la quantité $an^2 + 2bn + c$ divisible par f. Cette valeur étant mise à la place de n, toute l'équation deviendra divisible par f, et se trouvera réduite au cas de celle de l'art. 66 et suiv.

Il est facile de voir que la même méthode peut servir à réduire toute équation de la forme
$$ar^m + br^{m-1}s + cr^{m-2}s^2 +, \text{etc.} + ks^m = f,$$
a, b, c, etc. étant des nombres entiers donnés, et r et s deux indéterminées

1) Cette remarque ne se trouve pas dans les éditions ultérieures. H. W.

qui doivent être aussi des nombres entiers, en une autre équation semblable, mais dans laquelle le terme tout connu soit l'unité, et alors on y pourra appliquer la méthode générale du § II. Voyez la remarque de l'art. 30.

EXEMPLE I

81. *Soit proposé de rendre rationnelle cette quantité,*

$$\sqrt{(30 + 62s - 7s^2)},$$

en ne prenant pour s que des nombres entiers.

On aura donc à résoudre cette équation

$$30 + 62s - 7s^2 = y^2,$$

laquelle étant multipliée par 7, peut se mettre sous cette forme,

$$7 \cdot 30 + (31)^2 - (7s - 31)^2 = 7y^2,$$

ou bien, en faisant $7s - 31 = x$ et transposant,

$$x^2 = 1171 - 7y^2,$$

ou

$$x^2 + 7y^2 = 1171.$$

Cette équation est donc maintenant dans le cas de l'art. 64; de sorte qu'on aura $A = -7$ et $B = 1171$; d'où l'on voit d'abord que y et B doivent être premiers entr'eux, puisque ce dernier nombre ne renferme aucun facteur carré.

On fera, suivant la méthode de l'art. 65,

$$x = ny - 1171z,$$

et il faudra, pour que l'équation soit résoluble, que l'on puisse trouver pour n un nombre entier positif ou négatif non $> \frac{B}{2}$, c'est-à-dire non > 580, tel que $n^2 - A$ ou $n^2 + 7$ soit divisible par B ou par 1171.

Je trouve $n = \pm 321$, ce qui donne $n^2 + 7 = 1171 \times 88$; ainsi je substitue dans l'équation précédente $\pm 321y - 1171z$ à la place de x, moyennant quoi elle se trouve toute divisible par 1171, et la division faite, elle devient

$$88y^2 \mp 642yz + 1171z^2 = 1.$$

Pour résoudre cette équation je vais faire usage de la seconde méthode exposée dans l'art. 70, parce qu'elle est en effet plus simple et plus commode que la premiere. Or, comme le coefficient de y^2 est plus petit que celui de z^2, j'aurai ici $D = 1171$, $D^{\mathrm{I}} = 88$ et $n = \pm 321$; donc, retenant pour plus de simplicité la lettre y à la place de θ, et mettant y^{I} à la place de z, je ferai le calcul suivant, où je supposerai d'abord $n = 321$:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{321}{88} = 4, & n^{\mathrm{I}} &= 321 - 4 \cdot 88 = -31,\\
m^{\mathrm{I}} &= \frac{-31}{11} = -3, & n^{\mathrm{II}} &= -31 + 3 \cdot 11 = 2,\\
m^{\mathrm{II}} &= \frac{2}{1} = 2, & n^{\mathrm{III}} &= 2 - 2 \cdot 1 = 0,\\
D^{\mathrm{II}} &= \frac{31^2+7}{88} = 11, & y &= 4y^{\mathrm{I}} + y^{\mathrm{II}},\\
D^{\mathrm{III}} &= \frac{4+7}{11} = 1, & y^{\mathrm{I}} &= -3y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{III}},\\
D^{\mathrm{IV}} &= \frac{7}{1} = 7, & y^{\mathrm{II}} &= 2y^{\mathrm{III}} + y^{\mathrm{IV}}.
\end{aligned}$$

Puisque $n^{\mathrm{III}} = 0$ et par conséquent $< \frac{D^{\mathrm{III}}}{2}$ et $< \frac{D^{\mathrm{IV}}}{2}$, on s'arrêtera ici et on fera

$$D^{\mathrm{III}} = M = 1,\ D^{\mathrm{IV}} = L = 7,\ n^{\mathrm{III}} = 0 = N,\ \text{et}\ y^{\mathrm{III}} = \xi,\ y^{\mathrm{IV}} = \psi,$$

à cause que D^{III} est $< D^{\mathrm{IV}}$.

Maintenant je remarque que A étant $= -7$, et par conséquent négatif, il faut, pour la résolubilité de l'équation, que l'on ait $M = 1$; c'est ce que l'on vient de trouver; de sorte qu'on en peut conclure d'abord que la résolution est possible. On supposera donc $\xi = y^{\mathrm{III}} = 0$, $\psi = y^{\mathrm{IV}} = \pm 1$; et l'on aura, par les formules ci-dessus,

$$y^{\mathrm{II}} = \pm 1,\quad y^{\mathrm{I}} = \mp 3 = z,\quad y = \mp 12 \pm 1 = \mp 11,$$

les signes ambigus étant à volonté. Donc

$$x = 321y - 1171z = \mp 18,$$

et conséquemment

$$s = \frac{x+31}{7} = \frac{31 \mp 18}{7} = \frac{13}{7},\ \text{ou}\ = \frac{49}{7} = 7.$$

Or, comme on exige que la valeur de s soit égale à un nombre entier, on ne pourra prendre que $s = 7$.

Il est remarquable que l'autre valeur de s, savoir $\frac{13}{7}$, quoique fractionnaire, donne néanmoins un nombre entier pour la valeur du radical

$$\sqrt{(30 + 62s - 7s^2)},$$

et le même nombre 11 que donne la valeur $s = 7$; de sorte que ces deux valeurs de s seront les racines de l'équation $30 + 62s - 7s^2 = 121$.

Nous avons supposé ci-dessus $n = 321$; or on peut faire également $n = -321$; mais il est facile de voir d'avance que tout le changement qui en résultera dans les formules précédentes, c'est que les valeurs de m, m^{I}, m^{II}, et de n^{I}, n^{II}, changeront de signe, moyennant quoi les valeurs de y^{I} et de y deviendront aussi de différens signes, ce qui ne donnera aucun nouveau résultat, puisque ces valeurs ont déjà d'elles-mêmes le signe ambigu $\pm$.

Il en sera de même dans tous les autres cas; de sorte qu'on pourra toujours se dispenser de prendre successivement la valeur de n en *plus* et en *moins*.

La valeur $s = 7$ que nous venons de trouver, résulte de la valeur de $n = \pm 321$; on pourroit trouver d'autres valeurs de s, si on trouvoit d'autres valeurs de n qui eussent la condition requise; mais comme le diviseur $B = 1171$ est un nombre premier, il ne sauroit y avoir d'autres valeurs de n de la même qualité, comme nous l'avons démontré ailleurs, (Mémoires de Berlin pour l'année 1767, pag. 194[1]), d'où il faut conclure que le nombre 7 est le seul qui puisse satisfaire à la question.

J'avoue au reste qu'on peut résoudre le probleme précédent avec plus de facilité par le simple tâtonnement; car dès qu'on est parvenu à l'équation $x^2 = 1171 - 7y^2$, il n'y aura qu'à essayer pour y tous les nombres entiers dont les carrés multipliés par 7 ne surpasseront pas 1171, c'est-à-dire tous les nombres $< \sqrt{\frac{1171}{7}} < 13$.

Il en est de même de toutes les équations où A est un nombre négatif; car dès qu'on est arrivé à l'équation $x^2 = B + Ay^2$, ou, (en faisant $A = -a$), $x^2 = B - ay^2$, il est clair que les valeurs satisfaisantes de y, s'il y en a, ne pourront se trouver que parmi les nombres $< \sqrt{\frac{B}{a}}$. Aussi n'ai-je donné des

1) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. II, p. 377. H. W.

méthodes particulieres pour le cas de A négatif, que parce que ces méthodes ont une liaison intime avec celles qui concernent le cas de A positif, et que toutes ces méthodes étant ainsi rapprochées les unes des autres, peuvent se prêter un jour mutuel et acquérir un plus grand degré d'évidence.

EXEMPLE II

82. Donnons maintenant quelques exemples pour le cas de A positif, et *soit proposé de trouver tous les nombres entiers qu'on pourra prendre pour* y, *en sorte que la quantité radicale,*

$$\sqrt{(13y^2+101)},$$

devienne rationnelle.

On aura ici, (art. 64), $A=13$, $B=101$, et l'équation à résoudre en entiers sera

$$x^2-13y^2=101,$$

dans laquelle, à cause que 101 n'est divisible par aucun carré, y sera nécessairement premier à 101.

On fera donc, (art. 65),

$$x=ny-101z,$$

et il faudra que n^2-13 soit divisible par 101, en prenant $n<\frac{101}{2}<51$.

Je trouve $n=35$, ce qui donne $n^2=1225$ et $n^2-13=1212=101\cdot12$; ainsi on pourra prendre $n=\pm35$, et substituant, au lieu de x, $\pm35y-101z$, on aura une équation toute divisible par 101, qui, la division faite, sera

$$12y^2\mp70yz+101z^2=1.$$

Employons encore, pour résoudre cette équation, la méthode de l'art. 70; faisons $D^{\text{I}}=12$, $D=101$, $n=\pm35$, mais au lieu de la lettre θ nous conserverons la lettre y, et nous changerons seulement z en y^{I}, comme dans l'exemple précédent.

Soit, 1°. $n=35$, on fera le calcul suivant:

$$m=\frac{35}{12}=3,\quad n^{\text{I}}=35-3\cdot12=-1,\quad D^{\text{II}}=\frac{1-13}{12}=-1,\quad y=3y^{\text{I}}+y^{\text{II}},$$

$$m^{\text{I}}=\frac{-1}{-1}=1,\quad n^{\text{II}}=-1+1=0,\qquad D^{\text{III}}=\frac{-13}{-1}=13,\qquad y^{\text{I}}=y^{\text{II}}+y^{\text{III}}.$$

Comme $n^{\text{II}} = 0$ et conséquemment $< \frac{D^{\text{II}}}{2}$ et $< \frac{D^{\text{III}}}{2}$, on s'arrêtera ici et l'on aura la transformée

$$D^{\text{III}} y^{\text{II}\,2} - 2 n^{\text{II}} y^{\text{II}} y^{\text{III}} + D^{\text{II}} y^{\text{III}\,2} = 1,$$

ou bien

$$13 y^{\text{II}\,2} - y^{\text{III}\,2} = 1,$$

laquelle étant réduite à cette forme

$$y^{\text{III}\,2} - 13 y^{\text{II}\,2} = -1,$$

sera susceptible de la méthode de l'art. 71, n°. 2; et comme $A = 13$ est < 100, on pourra faire usage de la table de l'art. 41.

Ainsi il n'y aura qu'à voir si dans la série supérieure des nombres qui répondent à $\sqrt{13}$ il se trouve le nombre 1 dans une place paire; car il faut, pour que l'équation précédente soit résoluble, que dans la série P^0, P^{I}, P^{II}, etc. il se trouve un terme $= -1$; mais on a $P^0 = 1$, $-P^{\text{I}} = 4$, $P^{\text{II}} = 3$, etc. donc, etc. or, dans la série 1, 4, 3, 3, 4, 1, etc. on trouve justement 1 à la sixieme place, en sorte que $P^{\text{V}} = -1$; donc on aura une solution de l'équation proposée en prenant $y^{\text{III}} = p^{\text{V}}$ et $y^{\text{II}} = q^{\text{V}}$, les nombres p^{V}, q^{V} étant calculés d'après les formules de l'art. 25, en donnant à μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. les valeurs 3, 1, 1, 1, 1, 6, etc. qui forment la série inférieure des nombres répondans à $\sqrt{13}$ dans la même table.

On aura donc

$$\begin{array}{ll}
p^0 = 1 & q^0 = 0 \\
p^{\text{I}} = 3 & q^{\text{I}} = 1 \\
p^{\text{II}} = p^{\text{I}} + p^0 = 4 & q^{\text{II}} = 1 \\
p^{\text{III}} = p^{\text{II}} + p^{\text{I}} = 7 & q^{\text{III}} = q^{\text{II}} + q^{\text{I}} = 2 \\
p^{\text{IV}} = p^{\text{III}} + p^{\text{II}} = 11 & q^{\text{IV}} = q^{\text{III}} + q^{\text{II}} = 3 \\
p^{\text{V}} = p^{\text{IV}} + p^{\text{III}} = 18 & q^{\text{V}} = q^{\text{IV}} + q^{\text{III}} = 5.
\end{array}$$

Donc $y^{\text{III}} = 18$ et $y^{\text{II}} = 5$; donc

$$y^{\text{I}} = y^{\text{II}} + y^{\text{III}} = 23, \quad \text{et} \quad y = 3y^{\text{I}} + y^{\text{II}} = 74.$$

Nous avons supposé ci-dessus $n = 35$, mais on peut aussi prendre $n = -35$. Soit donc, 2°. $n = -35$, on fera

$$m=\frac{-35}{12}=-3,\quad n^{\mathrm{I}}=-35+3\cdot 12=1,\quad D^{\mathrm{II}}=\frac{1-13}{12}=-1,\quad y=-3y^{\mathrm{I}}+y^{\mathrm{II}},$$

$$m^{\mathrm{I}}=\frac{1}{-1}=-1,\quad n^{\mathrm{II}}=1-1=0,\qquad D^{\mathrm{III}}=\frac{-13}{-1}=13,\quad y^{\mathrm{I}}=-y^{\mathrm{II}}+y^{\mathrm{III}};$$

ainsi on aura les mêmes valeurs de D^{II}, D^{III} et n^{II} qu'auparavant, de sorte que la transformée en y^{II} et y^{III} sera aussi la même.

On aura donc aussi $y^{\mathrm{III}}=18$ et $y^{\mathrm{II}}=5$; donc

$$y^{\mathrm{I}}=-y^{\mathrm{II}}+y^{\mathrm{III}}=13,\quad \text{et}\quad y=-3y^{\mathrm{I}}+y^{\mathrm{II}}=-34.$$

Nous avons donc trouvé deux valeurs de y avec les valeurs correspondantes de y^{I} ou z; et ces valeurs résultent de la supposition de $n=\pm 35$; or, comme on ne peut trouver aucune autre valeur de n qui ait les conditions requises, il s'ensuit que les valeurs précédentes seront les seules valeurs *primitives* que l'on puisse avoir; mais on pourra ensuite en trouver une infinité de *dérivées* par la méthode de l'art. 72.

Prenant donc ces valeurs de y et z pour p et q, on aura en général, (art. cité),

$$y=74t-(101\cdot 23-35\cdot 74)u=74t+267u$$
$$z=23t+(\ 12\cdot 74-35\cdot 23)u=23t+\ 83u$$

ou

$$y=-34t-(101\cdot 13-35\cdot 34)u=-34t-123u$$
$$z=13t+(-12\cdot 34+35\cdot 13)u=13t+47u$$

et il n'y aura plus qu'à tirer les valeurs de t et u de l'équation $t^2-13u^2=1$; or ces valeurs se trouvent déjà toutes calculées dans la table qui est à la fin du chapitre 7 du traité précédent; on aura donc sur le champ $t=649$ et $u=180$; de sorte que prenant ces valeurs pour T et V dans les formules de l'art. 75, on aura en général

$$t=\frac{(649+180\sqrt{13})^m+(649-180\sqrt{13})^m}{2}$$

$$u=\frac{(649+180\sqrt{13})^m-(649-180\sqrt{13})^m}{2\sqrt{13}}$$

où l'on pourra donner à m telle valeur qu'on voudra, pourvu qu'on ne prenne que des nombres entiers positifs.

Or, comme les valeurs de t et u peuvent être prises tant en *plus* qu'en *moins*, les valeurs de y qui peuvent satisfaire à la question seront toutes renfermées dans ces deux formules,

$$y = \pm 74t \pm 267u,$$
$$y = \pm 34t \pm 123u,$$

les signes ambigus étant à volonté.

Si on fait $m = 0$, on aura $t = 1$ et $u = 0$; donc

$$y = \pm 74, \quad \text{ou} \quad = \pm 34;$$

et cette derniere valeur sera la plus petite qui puisse résoudre le probleme.

Nous avons déjà résolu ce même probleme dans les Mémoires de Berlin pour l'année 1768, p. 243[1]); mais comme nous y avons fait usage d'une méthode un peu différente de la précédente, et qui revient au même pour le fond que la *premiere* méthode de l'art. 66 ci-dessus, nous avons cru devoir le redonner ici, pour que la comparaison des résultats qui sont les mêmes par l'une et l'autre méthode, puisse leur servir de confirmation, s'il en est besoin.

EXEMPLE III

83. *Soit proposé encore de trouver des nombres entiers qui, étant pris pour y, rendent rationnelle la quantité*

$$\sqrt{(79y^2 + 101)}.$$

On aura donc à résoudre en entiers l'équation

$$x^2 - 79y^2 = 101,$$

dans laquelle y sera premier à 101, puisque ce nombre ne renferme aucun facteur carré.

Qu'on suppose donc

$$x = ny - 101z,$$

et il faudra que $n^2 - 79$ soit divisible par 101, en prenant $n < \frac{101}{2} < 51$; on trouve $n = 33$, ce qui donne $n^2 - 13 = 1010 = 101 \cdot 10$; ainsi on pourra prendre $n = \pm 33$, et ces valeurs seront les seules qui aient la condition requise.

1) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. II, p. 719. H. W.

Substituant donc $\pm 33y - 101z$ à la place de x, et divisant toute l'équation par 101, on aura cette transformée

$$10y^2 \mp 66yz + 101z^2 = 1.$$

On fera donc $D^{\mathrm{I}} = 10$, $D = 101$, $n = \pm 33$, et prenant d'abord n en *plus*, on opérera comme dans l'exemple précédent; on aura ainsi

$$m = \frac{33}{10} = 3, \quad n^{\mathrm{I}} = 33 - 3 \cdot 10 = 3, \quad D^{\mathrm{II}} = \frac{9-79}{10} = -7, \quad y = 3y^{\mathrm{I}} + y^{\mathrm{II}}.$$

Or, comme $n^{\mathrm{I}} = 3$ est déjà $< \frac{D^{\mathrm{I}}}{2}$ et $< \frac{D^{\mathrm{II}}}{2}$, il ne sera pas nécessaire d'aller plus loin; ainsi on aura la transformée

$$-7y^{\mathrm{I}2} - 6y^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{II}} + 10y^{\mathrm{II}2} = 1,$$

laquelle étant multipliée par -7, pourra se mettre sous cette forme,

$$(7y^{\mathrm{I}} + 3y^{\mathrm{II}})^2 - 79y^{\mathrm{II}2} = -7.$$

Puisque donc 7 est $< \sqrt{79}$, si cette équation est résoluble, il faudra que le nombre 7 se trouve parmi les termes de la série supérieure des nombres qui répondent à $\sqrt{79}$ dans la table de l'art. 41, et même que ce nombre 7 y occupe une place paire, puisqu'il a le signe —. Mais la série dont il s'agit ne renferme que les nombres 1, 15, 2, qui reviennent toujours; donc on doit conclure sur le champ que la derniere équation n'est pas résoluble, et qu'ainsi la proposée ne l'est pas, au moins d'après la valeur de $n = 33$.

Il ne reste donc qu'à essayer l'autre valeur $n = -33$, laquelle donnera

$$m = \frac{-33}{10} = -3, \quad n^{\mathrm{I}} = -33 + 3 \cdot 10 = -3, \quad D^{\mathrm{II}} = \frac{9-79}{10} = -7, \quad y = -3y^{\mathrm{I}} + y^{\mathrm{II}},$$

de sorte qu'on aura cette autre transformée,

$$-7y^{\mathrm{I}2} + 6y^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{II}} + 10y^{\mathrm{II}2} = 1,$$

laquelle se réduit à la forme

$$(7y^{\mathrm{I}} - 3y^{\mathrm{II}})^2 - 79y^{\mathrm{II}2} = -7,$$

qui est semblable à la précédente. D'où je conclus que l'équation proposée n'admet absolument aucune solution en nombres entiers.

REMARQUE

84. M. EULER, dans un excellent Mémoire imprimé dans le tome IX des Nouveaux Commentaires de Pétersbourg[1]), trouve par induction cette regle, pour juger de la résolubilité de toute équation de la forme

$$x^2 - Ay^2 = B,$$

lorsque B est un nombre premier; c'est que l'équation doit être possible toutes les fois que B sera de la forme $4An + r^2$, ou $4An + r^2 - A$; mais l'exemple précédent met cette regle en défaut; car 101 est un nombre premier de la forme $4An + r^2 - A$, en faisant $A = 79$, $n = -4$ et $r = 38$; cependant l'équation $x^2 - 79y^2 = 101$ n'admet aucune solution en nombres entiers.

Si la regle précédente étoit vraie, il s'ensuivroit que si l'équation $x^2 - Ay^2 = B$ est possible lorsque B a une valeur quelconque b, elle le seroit aussi en prenant $B = 4An + b$, pourvu que B fût un nombre premier. On pourroit limiter cette derniere regle, en exigeant que b fût aussi un nombre premier; mais avec cette limitation même elle se trouveroit démentie par l'exemple précédent; car on a $101 = 4An + b$, en prenant $A = 79$, $n = -2$ et $b = 733$; or 733 est un nombre premier de la forme $x^2 - 79y^2$, en faisant $x = 38$ et $y = 3$; cependant 101 n'est pas de la même forme $x^2 - 79y^2$.

---

1) Mémoire 279 (suivant l'Index d'ENESTRÖM): *De resolutione formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros*, Novi comment. acad. sc. Petrop. 9 (1762/3), 1764, p. 3—39; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 2. H. W.

PARAGRAPHE VIII

REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DE LA FORME

$$p^2 = Aq^2 + 1$$

ET SUR LA MANIERE ORDINAIRE DE LES RÉSOUDRE EN NOMBRES ENTIERS

85. La méthode du chapitre 7 du traité précédent, pour résoudre les équations de cette espece, est la même que celle que M. WALLIS donne dans son *Algebre*, (chapitre XCVIII), et qu'il attribue à Milord BROUNKER; on la trouve aussi dans *l'Algebre* de M. OZANAM, qui en fait honneur à M. DE FERMAT. Quoi qu'il en soit de l'Inventeur de cette méthode, il est au moins certain que M. DE FERMAT est l'Auteur du probleme qui en fait l'objet; il l'avoit proposé comme un défi à tous les Géometres Anglois, ainsi qu'on le voit par le *Commercium epistolicum* de M. WALLIS; c'est ce qui donna occasion à Milord BROUNKER d'inventer la méthode dont nous parlons; mais il ne paroît pas que cet Auteur ait connu toute l'importance du probleme qu'il avoit résolu; on ne trouve même rien sur ce sujet dans les écrits qui nous sont restés de M. FERMAT, ni dans aucun des Ouvrages du siecle passé, où l'on traite de l'Analyse indéterminée. Il est bien naturel de croire que M. FERMAT, qui s'étoit principalement occupé de la théorie des nombres entiers, sur lesquels il nous a d'ailleurs laissé de très-beaux théoremes, avoit été conduit au probleme dont il s'agit par les recherches qu'il avoit faites sur la résolution générale des équations de la forme

$$x^2 = Ay^2 + B,$$

auxquelles se réduisent toutes les équations du second degré à deux inconnues; cependant ce n'est qu'à M. EULER que nous devons la remarque que ce probleme est nécessaire pour trouver toutes les solutions possibles de ces sortes d'équations. (Voyez le chapitre 6 ci-dessus[1]), le tome VI des Anciens Commentaires de Pétersbourg[2]), et le tome IX des Nouveaux.[3])

La méthode que nous avons suivie pour démontrer cette proposition est un peu différente de celle de M. EULER, mais aussi est-elle, si je ne me trompe, plus directe et plus générale. Car d'un côté la méthode de M. EULER conduit naturellement à des expressions fractionnaires lorsqu'il s'agit de les éviter, et de l'autre on ne voit pas clairement que les suppositions qu'on y fait pour faire disparoître les fractions, soient les seules qui puissent avoir lieu. En effet nous avons fait voir ailleurs qu'il ne suffit pas toujours de trouver une seule solution de l'équation $x^2 = Ay^2 + B$, pour pouvoir en déduire toutes les autres, à l'aide de l'équation $p^2 = Aq^2 + 1$; et qu'il peut y avoir souvent, au moins lorsque B n'est pas un nombre premier, des valeurs de x et y qui ne sauroient être renfermées dans les expressions générales de M. EULER. (Voyez l'art. 45 de mon *Mémoire sur les problemes indéterminés,* dans les Mémoires de Berlin, année 1767.[4])

Quant à la méthode de résoudre les équations de la forme

$$p^2 = Aq^2 + 1,$$

il nous semble que celle du chapitre 7, quelque ingénieuse qu'elle soit, est encore assez imparfaite. Car, 1°. elle ne fait pas voir que toute équation de ce genre est toujours résoluble en nombres entiers, lorsque A est un nombre positif non carré. 2°. Il n'est pas démontré qu'elle doive faire parvenir toujours à la résolution cherchée. M. WALLIS a, à la vérité, prétendu prouver la premiere de ces deux propositions; mais sa démonstration n'est, si j'ose le dire, qu'une simple pétition de principe. (Voyez le chapitre XCIX de son *Algebre*). Je crois donc être le premier qui en ait donné une tout-à-fait rigoureuse; elle se trouve dans les Mélanges de Turin, tome IV[5]); mais elle est très-longue et très-indirecte; celle de l'art. 37 ci-dessus[6]), est tirée des vrais principes de la chose, et ne laisse, ce me semble, rien à désirer. Cette mé-

1) Voir p. 369. H. W.

2) Mémoire 29 (suivant l'Index d'ENESTRÖM): *De solutione problematum* DIOPHANTAEORUM *per numeros integros*, Comment. acad. sc. Petrop. **6** (1732/3), 1738, p. 175—188; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series I, vol. 2. H. W.

3) Voir la note p. 630. H. W.

4) *Oeuvres de LAGRANGE*, t. II, p. 457. H. W.

5) *Oeuvres de LAGRANGE*, t. I, p. 671. H. W.

6) Voir p. 562. H. W.

thode nous met aussi en état d'apprécier celle du chapitre 7, et de reconnoître les inconvéniens où l'on pourroit tomber, si on la suivoit sans aucune précaution; c'est ce que nous allons discuter.

86. De ce que nous avons démontré dans le § II, il s'ensuit que les valeurs de p et q qui satisfont à l'équation $p^2 - Aq^2 = 1$, ne peuvent être que les termes de quelqu'une des fractions *principales* déduites de la fraction continue qui exprimeroit la valeur de $\sqrt{A}$; de sorte que supposant cette fraction continue représentée ainsi,

$$\mu + \cfrac{1}{\mu^{\text{I}} + \cfrac{1}{\mu^{\text{II}} + \cfrac{1}{\mu^{\text{III}} + \text{, etc.}}}}$$

on aura nécessairement

$$\frac{p}{q} = \mu + \cfrac{1}{\mu^{\text{I}} + \cfrac{1}{\mu^{\text{II}} + \text{, etc.} + \cfrac{1}{\mu^{\varrho}}}},$$

μ^{ϱ} étant un terme quelconque de la série infinie μ^{I}, μ^{II}, etc. dont le quantieme ϱ ne peut se déterminer qu'*à posteriori*.

Il faut remarquer que dans cette fraction continue les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. doivent être tous positifs, quoique nous ayons vu dans l'art. 3 qu'on peut en général, dans les fractions continues, rendre les dénominateurs positifs ou négatifs, suivant que l'on prend les valeurs approchées plus petites ou plus grandes que les véritables; mais la méthode du probleme I, (art. 23 et suiv.) exige absolument que les valeurs approchées μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. soient toutes prises en défaut.

87. Maintenant, puisque la fraction $\frac{p}{q}$ est égale à une fraction continue dont les termes sont μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. μ^{ϱ}, il est clair, par l'art. 4, que μ sera le quotient de p divisé par q, que μ^{I} sera celui de q divisé par le reste, μ^{II} celui de ce reste divisé par le second reste, et ainsi de suite; de sorte que nommant r, s, t, etc. les restes dont il s'agit, on aura, par la nature de la division,

$$p = \mu q + r, \quad q = \mu^{\text{I}} r + s, \quad r = \mu^{\text{II}} s + t, \quad \text{etc.}$$

où le dernier reste sera nécessairement $= 0$, et l'avant-dernier $= 1$, à cause que p et q sont des nombres premiers entr'eux. Ainsi μ sera la valeur entiere approchée de $\frac{p}{q}$, μ^{I} celle de $\frac{q}{r}$, μ^{II} celle de $\frac{r}{s}$, etc. ces valeurs étant toutes prises moindres que les véritables, à l'exception de la derniere μ^{ϱ}, qui sera exactement égale à la fraction correspondante, à cause que le reste suivant est supposé nul.

Or, comme les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. μ^{ϱ}, sont les mêmes pour la fraction continue qui exprime la valeur de $\frac{p}{q}$, et pour celle qui exprime la valeur de $\sqrt{A}$, on peut prendre, jusqu'au terme μ^{ϱ}, $\frac{p}{q}=\sqrt{A}$, c'est à-dire

$$p^2-Aq^2=0.$$

Ainsi on cherchera d'abord la valeur approchée en défaut de $\frac{p}{q}$, c'est-à-dire de $\sqrt{A}$, et ce sera la valeur de μ; ensuite on substituera dans $p^2-Aq^2=0$, à la place de p sa valeur $\mu q+r$, ce qui donnera

$$(\mu^2-A)q^2+2\mu qr+r^2=0,$$

et on cherchera de nouveau la valeur approchée en défaut de $\frac{q}{r}$, c'est-à-dire de la racine positive de l'équation

$$(\mu^2-A)\left(\frac{q}{r}\right)^2+2\mu\frac{q}{r}+1=0,$$

et l'on aura la valeur de μ^{I}.

On continuera à substituer dans la transformée $(\mu^2-A)q^2+2\mu qr+r^2=0$, à la place de q, $\mu^{\mathrm{I}}r+s$; on aura une équation dont la racine sera $\frac{r}{s}$; on prendra la valeur approchée en défaut de cette racine, et l'on aura la valeur de μ^{II}. On substituera $\mu^{\mathrm{II}}s+t$ à la place de r, etc.

Supposons maintenant que t soit, par exemple, le dernier reste, qui doit être nul, s sera l'avant-dernier, qui doit être $=1$; donc si la transformée en s et t de la formule p^2-Aq^2 est

$$Ps^2+Qst+Rt^2,$$

il faudra qu'en y faisant $t=0$ et $s=1$, elle devienne $=1$, pour que l'équation proposée $p^2-Aq^2=1$ ait lieu; donc P devra être $=1$. Ainsi il n'y aura qu'à continuer les opérations et les transformations ci-dessus, jusqu'à ce que l'on parvienne à une transformée où le coefficient du premier terme soit égal à l'unité; alors on fera dans cette formule la premiere des deux indéterminées, comme r, égale à 1, et la seconde, comme s, égale à zéro; et en remontant on aura les valeurs convenables de p et q.

On pourroit aussi opérer sur l'équation même $p^2 - Aq^2 = 1$, en ayant seulement soin de faire abstraction du terme tout connu 1, et par conséquent aussi des autres termes tout connus qui peuvent résulter de celui-ci, dans la détermination des valeurs approchées μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. de $\frac{p}{q}$, $\frac{q}{r}$, $\frac{r}{s}$, etc. dans ce cas on essayera à chaque nouvelle transformation, si l'équation transformée peut subsister en y faisant l'une des deux indéterminées $= 1$ et l'autre $= 0$; quand on sera parvenu à une pareille transformée, l'opération sera achevée, et il n'y aura plus qu'à revenir sur ses pas pour avoir les valeurs cherchées de p et de q.

Nous voilà donc conduits à la méthode du chapitre 7. A examiner cette méthode en elle-même et indépendamment des principes d'où nous venons de la déduire, il doit paroître assez indifférent de prendre les valeurs approchées de μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. plus petites ou plus grandes que les véritables, d'autant que, de quelque maniere qu'on prenne ces valeurs, celles de r, s, t, etc. doivent aller également en diminuant jusqu'à zéro, (art. 6).

Aussi M. WALLIS remarque-t-il expressément qu'on peut employer à volonté les limites en *plus* ou en *moins* pour les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. et il propose même ce moyen comme propre à abréger souvent le calcul; c'est aussi ce que M. EULER fait observer dans l'art. 102 et suiv. du chapitre cité[1]; cependant je vais faire voir par un exemple, qu'en s'y prenant de cette maniere on peut risquer de ne jamais parvenir à la solution de l'équation proposée.

Prenons l'exemple de l'art. 101 du même chapitre où il s'agit de résoudre une équation de cette forme,

$$p^2 = 6q^2 + 1 \quad \text{ou bien} \quad p^2 - 6q^2 = 1.$$

On aura donc $p = \sqrt{(6q^2 + 1)}$, et négligeant le terme constant 1, $p = q\sqrt{6}$; donc

$$\frac{p}{q} = \sqrt{6} > 2 < 3;$$

prenons la limite en *moins* et faisons $\mu = 2$, et ensuite $p = 2q + r$; substi-

1) Voir p. 381. H. W.

tuant donc cette valeur, on aura

$$-2q^2+4qr+r^2=1;$$

donc

$$q=\frac{2r+\sqrt{(6r^2-2)}}{2},$$

ou bien, en rejetant le terme constant -2,

$$q=\frac{2r+r\sqrt{6}}{2}, \text{ d'où } \frac{q}{r}=\frac{2+\sqrt{6}}{2}>2<3;$$

prenons de nouveau la limite en *moins*, et faisons $q=2r+s$, la derniere équation deviendra

$$r^2-4rs-2s^2=1,$$

où l'on voit d'abord qu'on peut supposer $s=0$ et $r=1$; ainsi on aura $q=2$, $p=5$.

Maintenant reprenons la premiere transformée $-2q^2+4qr+r^2=1$, où nous avons vu que $\frac{q}{r}>2$ et <3, et au lieu de prendre la limite en *moins*, prenons-la en *plus*, c'est-à-dire, supposons $q=3r+s$, ou bien, puisque s doit être alors une quantité négative, $q=3r-s$, on aura la transformée suivante,

$$-5r^2+8rs-2s^2=1,$$

laquelle donnera

$$r=\frac{4s+\sqrt{(6s^2-5)}}{5};$$

donc, négligeant le terme constant 5,

$$r=\frac{4s+s\sqrt{6}}{5}, \quad \text{et} \quad \frac{r}{s}=\frac{4+\sqrt{6}}{5}>1<2.$$

Prenons de nouveau la limite en *plus*, et faisons $r=2s-t$, on aura

$$-6s^2+12st-5t^2=1;$$

donc

$$s=\frac{6t+\sqrt{(6t^2-6)}}{6};$$

donc, rejetant le terme -6,

$$s=\frac{6t+t\sqrt{6}}{6}, \quad \text{et} \quad \frac{s}{t}=1+\frac{\sqrt{6}}{6}>1<2.$$

Qu'on continue à prendre les limites en *plus* et qu'on fasse $s = 2t - u$, il viendra

$$-5t^2 + 12tu - 6u^2 = 1;$$

donc

$$t = \frac{6u + \sqrt{(6u^2 - 5)}}{5}; \text{ donc } \frac{t}{u} = \frac{6 + \sqrt{6}}{5} > 1 < 2.$$

Faisons donc de même $t = 2u - x$, on aura

$$-2u^2 + 8ux - 5x^2 = 1;$$

donc, etc.

Continuant de cette maniere à prendre toujours les limites en *plus*, on ne trouvera jamais de transformée où le coefficient du premier terme soit égal à l'unité, comme il le faut, pour qu'on puisse trouver une solution de la proposée.

La même chose arrivera nécessairement toutes les fois qu'on prendra la premiere limite en *moins*, et les suivantes toutes en *plus*; je pourrois en donner la raison *à priori*; mais comme le Lecteur peut la trouver aisément par les principes de notre théorie, je ne m'y arrêterai pas. Quant à présent il me suffit d'avoir montré la nécessité de traiter ces sortes de problemes d'une maniere plus rigoureuse et plus profonde qu'on ne l'avoit encore fait.

PARAGRAPHE IX

DE LA MANIERE DE TROUVER DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE TOUS LES DEGRÉS QUI ÉTANT MULTIPLIÉES ENSEMBLE PRODUISENT TOUJOURS DES FONCTIONS SEMBLABLES

ADDITION POUR LES CHAPITRES 11 ET 12[1])

88. Je crois avoir eu en même temps que M. EULER l'idée de faire servir les facteurs irrationnels et même imaginaires des formules du second degré, à trouver les conditions qui rendent ces formules égales à des carrés ou à des puissances quelconques; j'ai lu sur ce sujet à l'Académie, en 1768, un Mémoire qui n'a pas été imprimé, mais dont j'ai donné un précis à la fin de mes *Recherches sur les Problemes indéterminés*, qui se trouvent dans le volume pour l'année 1767[2]), lequel a paru en 1769, avant même la traduction allemande de l'*Algebre* de M. EULER.

J'ai fait voir dans l'endroit que je viens de citer, comment on peut étendre la même méthode à des formules de degrés plus élevés que le second; et j'ai par ce moyen donné la solution de quelques équations dont il auroit peut-être été fort difficile de venir à bout par d'autres voies. Je vais maintenant généraliser encore davantage cette méthode, qui me paroît mériter particulierement l'attention des Géometres par sa nouveauté et par sa singularité.

89. Soient α et β les deux racines de l'équation du second degré

$$s^2 - as + b = 0,$$

et considérons le produit de ces deux facteurs

$$(x + \alpha y)(x + \beta y),$$

---

1) Voir p. 414 et 425. H. W.

2) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. II, p. 377 et 655. H. W.

qui sera nécessairement réel; ce produit sera $x^2 + (\alpha + \beta)xy + \alpha\beta y^2$; or on a $\alpha + \beta = a$, et $\alpha\beta = b$, par la nature de l'équation $s^2 - as + b = 0$; donc on aura cette formule du second degré

$$x^2 + axy + by^2,$$

laquelle est composée des deux facteurs

$$x + \alpha y \quad \text{et} \quad x + \beta y.$$

Maintenant il est visible que si l'on a une formule semblable

$$x^{\mathrm{I}2} + ax^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{I}} + by^{\mathrm{I}2},$$

et qu'on veuille les multiplier l'une par l'autre, il suffira de multiplier ensemble les deux facteurs $x + \alpha y$, $x^{\mathrm{I}} + \alpha y^{\mathrm{I}}$, et les deux $x + \beta y$, $x^{\mathrm{I}} + \beta y^{\mathrm{I}}$, ensuite les deux produits l'un par l'autre. Or le produit de $x + \alpha y$ par $x^{\mathrm{I}} + \alpha y^{\mathrm{I}}$ est $xx^{\mathrm{I}} + \alpha(xy^{\mathrm{I}} + yx^{\mathrm{I}}) + \alpha^2 yy^{\mathrm{I}}$; mais puisque α est une des racines de l'équation $s^2 - as + b = 0$, on aura $\alpha^2 - a\alpha + b = 0$; donc $\alpha^2 = a\alpha - b$; donc, substituant cette valeur de α^2 dans la formule précédente, elle deviendra

$$xx^{\mathrm{I}} - byy^{\mathrm{I}} + \alpha(xy^{\mathrm{I}} + yx^{\mathrm{I}} + ayy^{\mathrm{I}});$$

de sorte qu'en faisant, pour plus de simplicité,

$$X = xx^{\mathrm{I}} - byy^{\mathrm{I}}, \quad Y = xy^{\mathrm{I}} + yx^{\mathrm{I}} + ayy^{\mathrm{I}},$$

le produit des deux facteurs $x + \alpha y$, $x^{\mathrm{I}} + \alpha y^{\mathrm{I}}$, sera

$$X + \alpha Y,$$

et par conséquent, de la même forme que chacun d'eux. On trouvera de même que le produit des deux autres facteurs, $x + \beta y$ et $x^{\mathrm{I}} + \beta y^{\mathrm{I}}$, sera

$$X + \beta Y;$$

de sorte que le produit total sera $(X + \alpha Y)(X + \beta Y)$, savoir

$$X^2 + aXY + bY^2.$$

C'est le produit des deux formules semblables,

$$x^2 + axy + by^2, \quad \text{et} \quad x^{\mathrm{I}2} + ax^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{I}} + by^{\mathrm{I}2}.$$

Si on vouloit avoir le produit de ces trois formules semblables

$$x^2 + axy + by^2, \quad x^{\mathrm{I}2} + ax^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{I}} + by^{\mathrm{I}2}, \quad x^{\mathrm{II}2} + ax^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{II}} + by^{\mathrm{II}2},$$

il n'y auroit qu'à trouver celui de la formule $X^2 + aXY + bY^2$ par la derniere $x^{II2} + ax^{II}y^{II} + by^{II2}$, et il est visible, par les formules ci-dessus, qu'en faisant

$$X^I = Xx^{II} - bYy^{II}, \quad Y^I = Xy^{II} + Yx^{II} + aYy^{II},$$

le produit cherché seroit

$$X^{I2} + aX^IY^I + bY^{I2}.$$

On pourra trouver de même le produit de quatre ou d'un plus grand nombre de formules semblables à celle-ci, $x^2 + axy + by^2$, et ces produits seront toujours aussi de la même forme.

90. Si on fait $x^I = x$ et $y^I = y$, on aura

$$X = x^2 - by^2, \quad Y = 2xy + ay^2,$$

et par conséquent

$$(x^2 + axy + by^2)^2 = X^2 + aXY + bY^2.$$

Donc, si l'on veut trouver des valeurs rationnelles de X et Y, telles que la formule

$$X^2 + aXY + bY^2$$

devienne un carré, il n'y aura qu'à donner à X et à Y les valeurs précédentes, et l'on aura pour la racine du carré la formule

$$x^2 + axy + by^2,$$

x et y étant deux indéterminées.

Si on fait de plus $x^{II} = x^I = x$ et $y^{II} = y^I = y$, on aura

$$X^I = Xx - bYy, \quad Y^I = Xy + Yx + aYy,$$

c'est-à-dire en substituant les valeurs précédentes de X et Y,

$$X^I = x^3 - 3bxy^2 - aby^3, \quad Y^I = 3x^2y + 3axy^2 + (a^2 - b)y^3;$$

donc

$$(x^2 + axy + by^2)^3 = X^{I2} + aX^IY^I + bY^{I2}.$$

Ainsi, si l'on proposoit de trouver des valeurs rationnelles de X^I et Y^I, telles que la formule

$$X^{I2} + aX^IY^I + bY^{I2}$$

devînt un cube, il n'y auroit qu'à donner à X^{I} et Y^{I} les valeurs précédentes, moyennant quoi on auroit un cube dont la racine seroit

$$x^2 + axy + by^2,$$

x et y étant deux indéterminées.

On pourroit résoudre d'une maniere semblable les questions où il s'agiroit de produire des puissances quatriemes, cinquiemes, etc. mais on peut aussi trouver immédiatement des formules générales pour une puissance quelconque m, sans passer par les puissances inférieures.

Soit donc proposé de trouver des valeurs rationnelles de X et Y, telles que la formule $X^2 + aXY + bY^2$ devienne une puissance m, c'est-à-dire qu'il s'agisse de résoudre l'équation

$$X^2 + aXY + bY^2 = Z^m.$$

Comme la quantité $X^2 + aXY + bY^2$ est formée du produit des deux facteurs $X + \alpha Y$ et $X + \beta Y$, il faudra, pour que cette quantité devienne une puissance du degré m, que chacun de ses deux facteurs devienne aussi une semblable puissance.

Faisons donc d'abord

$$X + \alpha Y = (x + \alpha y)^m;$$

et développant cette puissance par le théoreme de Newton, on aura

$$x^m + mx^{m-1}y\alpha + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2\alpha^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^{m-3}y^3\alpha^3 +, \text{etc.}$$

Or, puisque α est une des racines de l'équation $s^2 - as + b = 0$, on aura aussi $\alpha^2 - a\alpha + b = 0$; donc

$$\alpha^2 = a\alpha - b,\ \ \alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha = (a^2 - b)\alpha - ab,$$

$$\alpha^4 = (a^2 - b)\alpha^2 - ab\alpha = (a^3 - 2ab)\alpha - a^2b + b^2,$$

et ainsi de suite. Ainsi il n'y aura qu'à substituer ces valeurs dans la formule précédente, et elle se trouvera par-là composée de deux parties, l'une toute rationnelle qu'on comparera à X, et l'autre toute multipliée par la racine α, qu'on comparera à αY.

Si on fait pour plus de simplicité

$$\begin{array}{ll}
A^{\text{I}} = 1 & B^{\text{I}} = 0 \\
A^{\text{II}} = a & B^{\text{II}} = b \\
A^{\text{III}} = aA^{\text{II}} - bA^{\text{I}} & B^{\text{III}} = aB^{\text{II}} - bB^{\text{I}} \\
A^{\text{IV}} = aA^{\text{III}} - bA^{\text{II}} & B^{\text{IV}} = aB^{\text{III}} - bB^{\text{II}} \\
A^{\text{V}} = aA^{\text{IV}} - bA^{\text{III}}, \text{ etc.} & B^{\text{V}} = aB^{\text{IV}} - bB^{\text{III}}, \text{ etc.}
\end{array}$$

on aura

$$\begin{aligned}
\alpha &= A^{\text{I}}\,\alpha - B^{\text{I}} \\
\alpha^2 &= A^{\text{II}}\,\alpha - B^{\text{II}} \\
\alpha^3 &= A^{\text{III}}\alpha - B^{\text{III}} \\
\alpha^4 &= A^{\text{IV}}\alpha - B^{\text{IV}}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Donc, substituant ces valeurs et comparant, on aura

$$X = x^m - mx^{m-1}yB^{\text{I}} - \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2B^{\text{II}} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^{m-3}y^3B^{\text{III}} -, \text{ etc.}$$

$$Y = mx^{m-1}yA^{\text{I}} + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2A^{\text{II}} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^{m-3}y^3A^{\text{III}} +, \text{ etc.}$$

Or, comme la racine α n'entre point dans les expressions de X et Y, il est clair qu'ayant

$$X + \alpha Y = (x + \alpha y)^m,$$

on aura aussi

$$X + \beta Y = (x + \beta y)^m;$$

donc, multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura

$$X^2 + aXY + bY^2 = (x^2 + axy + by^2)^m,$$

et par conséquent

$$Z = x^2 + axy + by^2.$$

Ainsi le probleme est résolu.

Si a étoit $= 0$, les formules précédentes deviendroient beaucoup plus simples; car on auroit

$$A^{\text{I}} = 1,\ A^{\text{II}} = 0,\ A^{\text{III}} = -b,\ A^{\text{IV}} = 0,\ A^{\text{V}} = b^2,\ A^{\text{VI}} = 0,\ A^{\text{VII}} = -b^3, \text{ etc.}$$

et de même

$$B^{\mathrm{I}} = 0,\ B^{\mathrm{II}} = b,\ B^{\mathrm{III}} = 0,\ B^{\mathrm{IV}} = -b^2,\ B^{\mathrm{V}} = 0,\ B^{\mathrm{VI}} = b^3, \text{ etc.}$$

donc

$$X = x^m - \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 b$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4} x^{m-4} y^4 b^2 -, \text{ etc.}$$

$$Y = m x^{m-1} y - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3} x^{m-3} y^3 b$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} x^{m-5} y^5 b^2 -, \text{ etc.}$$

et ces valeurs satisferont à l'équation

$$X^2 + bY^2 = (x^2 + by^2)^m.$$

91. Passons maintenant aux formules de trois dimensions; pour cela nous désignerons par α, β, γ les trois racines de l'équation du troisieme degré,

$$s^3 - as^2 + bs - c = 0,$$

et nous considérerons ensuite le produit de ces trois facteurs,

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \beta y + \beta^2 z)(x + \gamma y + \gamma^2 z),$$

lequel sera nécessairement rationnel, comme on va le voir. La multiplication faite, on aura le produit suivant,

$$\begin{gathered} x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 y + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)x^2 z + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)xy^2 \\ + (\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta)xyz + (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)xz^2 \\ + \alpha\beta\gamma y^3 + (\alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta)y^2 z + (\alpha^2\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2\beta + \beta^2\gamma^2\alpha)yz^2 \\ + \alpha^2\beta^2\gamma^2 z^3; \end{gathered}$$

or par la nature de l'équation on a

$$\alpha + \beta + \gamma = a, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b, \quad \alpha\beta\gamma = c;$$

de plus on trouvera

$$\begin{gathered} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = a^2 - 2b, \\ \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - 3\alpha\beta\gamma = ab - 3c, \\ \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)\alpha\beta\gamma = b^2 - 2ac, \\ \alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta = (\alpha + \beta + \gamma)\alpha\beta\gamma = ac, \\ \alpha^2\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2\beta + \beta^2\gamma^2\alpha = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\alpha\beta\gamma = bc; \end{gathered}$$

donc faisant ces substitutions, le produit dont il s'agit sera

$$x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 + (ab - 3c)xyz + (b^2 - 2ac)xz^2$$
$$+ cy^3 + acy^2z + bcyz^2 + c^2z^3.$$

Et cette formule aura la propriété, que si on multiplie ensemble autant de semblables formules que l'on veut, le produit sera toujours aussi une formule semblable.

En effet, supposons qu'on demande le produit de cette formule-là par cette autre-ci,

$$x'^3 + ax'^2y' + (a^2 - 2b)x'^2z' + bx'y'^2 + (ab - 3c)x'y'z' + (b^2 - 2ac)x'z'^2$$
$$+ cy'^3 + acy'^2z' + bcy'z'^2 + c^2z'^3;$$

il est clair qu'il n'y aura qu'à chercher celui de ces six facteurs,

$$x + \alpha y + \alpha^2 z, \quad x + \beta y + \beta^2 z, \quad x + \gamma y + \gamma^2 z,$$
$$x' + \alpha y' + \alpha^2 z', \quad x' + \beta y' + \beta^2 z', \quad x' + \gamma y' + \gamma^2 z';$$

qu'on multiplie d'abord $x + \alpha y + \alpha^2 z$ par $x' + \alpha y' + \alpha^2 z'$, on aura ce produit partiel

$$xx' + \alpha(xy' + yx') + \alpha^2(xz' + zx' + yy') + \alpha^3(yz' + zy') + \alpha^4 zz';$$

or, α étant une des racines de l'équation $s^3 - as^2 + bs - c = 0$, on aura

$$\alpha^3 - a\alpha^2 + b\alpha - c = 0, \text{ par conséquent } \alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha + c;$$

donc

$$\alpha^4 = a\alpha^3 - b\alpha^2 + c\alpha = (a^2 - b)\alpha^2 - (ab - c)\alpha + ac;$$

de sorte qu'en substituant ces valeurs, et faisant pour abréger

$$X = xx' + c(yz' + zy') + aczz',$$
$$Y = xy' + yx' - b(yz' + zy') - (ab - c)zz',$$
$$Z = xz' + zx' + yy' + a(yz' + zy') + (a^2 - b)zz',$$

le produit dont il s'agit deviendra de cette forme

$$X + \alpha Y + \alpha^2 Z,$$

c'est-à-dire de la même forme que chacun des produisans. Or, comme la racine α n'entre point dans les valeurs de X, Y, Z, il est clair que ces quantités seront les mêmes en changeant α en β ou en γ; donc, puisque l'on a déjà

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x^{\mathrm{I}} + \alpha y^{\mathrm{I}} + \alpha^2 z^{\mathrm{I}}) = X + \alpha Y + \alpha^2 Z,$$

on aura aussi, en changeant α en β,

$$(x + \beta y + \beta^2 z)(x^{\mathrm{I}} + \beta y^{\mathrm{I}} + \beta^2 z^{\mathrm{I}}) = X + \beta Y + \beta^2 Z,$$

et en changeant α en γ,

$$(x + \gamma y + \gamma^2 z)(x^{\mathrm{I}} + \gamma y^{\mathrm{I}} + \gamma^2 z^{\mathrm{I}}) = X + \gamma Y + \gamma^2 Z;$$

donc, multipliant ces trois équations ensemble, on aura d'un côté le produit des deux formules proposées, et de l'autre la formule

$$\begin{gathered} X^3 + aX^2 Y + (a^2 - 2b)X^2 Z + bXY^2 + (ab - 3c)XYZ + (b^2 - 2ac)XZ^2 \\ + cY^3 + acY^2 Z + bcYZ^2 + c^2 Z^3, \end{gathered}$$

qui sera donc égale au produit demandé, et qui est, comme l'on voit, de la même forme que chacune des deux formules dont elle est composée.

Si on avoit une troisieme formule telle que celle-ci,

$$\begin{gathered} x^{\mathrm{II}3} + ax^{\mathrm{II}2}y^{\mathrm{II}} + (a^2 - 2b)x^{\mathrm{II}2}z^{\mathrm{II}} + bx^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{II}2} + (ab - 3c)x^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{II}}z^{\mathrm{II}} + (b^2 - 2ac)x^{\mathrm{II}}z^{\mathrm{II}2} \\ + cy^{\mathrm{II}3} + acy^{\mathrm{II}2}z^{\mathrm{II}} + bcy^{\mathrm{II}}z^{\mathrm{II}2} + c^2 z^{\mathrm{II}3}, \end{gathered}$$

et qu'on voulût avoir le produit de cette formule et des deux précédentes, il est clair qu'il n'y auroit qu'à faire

$$\begin{aligned} X^{\mathrm{I}} &= Xx^{\mathrm{II}} + c(Yz^{\mathrm{II}} + Zy^{\mathrm{II}}) + acZz^{\mathrm{II}}, \\ Y^{\mathrm{I}} &= Xy^{\mathrm{II}} + Yx^{\mathrm{II}} - b(Yz^{\mathrm{II}} + Zy^{\mathrm{II}}) - (ab - c)Zz^{\mathrm{II}}, \\ Z^{\mathrm{I}} &= Xz^{\mathrm{II}} + Zx^{\mathrm{II}} + Yy^{\mathrm{II}} + a(Yz^{\mathrm{II}} + Zy^{\mathrm{II}}) + (a^2 - b)Zz^{\mathrm{II}}, \end{aligned}$$

et l'on auroit pour le produit cherché

$$\begin{gathered} X^{\mathrm{I}3} + aX^{\mathrm{I}2}Y^{\mathrm{I}} + (a^2 - 2b)X^{\mathrm{I}2}Z^{\mathrm{I}} + bX^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{I}2} + (ab - 3c)X^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{I}}Z^{\mathrm{I}} + (b^2 - 2ac)X^{\mathrm{I}}Z^{\mathrm{I}2} \\ + cY^{\mathrm{I}3} + acY^{\mathrm{I}2}Z^{\mathrm{I}} + bcY^{\mathrm{I}}Z^{\mathrm{I}2} + c^2 Z^{\mathrm{I}3}. \end{gathered}$$

92. Faisons maintenant $x^{\mathrm{I}} = x$, $y^{\mathrm{I}} = y$, $z^{\mathrm{I}} = z$; nous aurons

$$\begin{aligned} X &= x^2 + 2cyz + acz^2, \\ Y &= 2xy - 2byz - (ab - c)z^2, \\ Z &= 2xz + y^2 + 2ayz + (a^2 - b)z^2, \end{aligned}$$

et ces valeurs satisferont à l'équation

$$X^3 + aX^2Y + bXY^2 + cY^3 + (a^2 - 2b)X^2Z + (ab - 3c)XYZ + acY^2Z$$
$$+ (b^2 - 2ac)XZ^2 + bcYZ^2 + c^2Z^3 = V^2,$$

en prenant

$$V = x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 + (a^2 - 2b)x^2z + (ab - 3c)xyz + acy^2z$$
$$+ (b^2 - 2ac)xz^2 + bcyz^2 + c^2z^3;$$

donc, si l'on avoit, par exemple, à résoudre une équation de cette forme,

$$X^3 + aX^2Y + bXY^2 + cY^3 = V^2,$$

a, b, c étant des quantités quelconques données, il n'y auroit qu'à rendre $Z = 0$, en faisant

$$2xz + y^2 + 2ayz + (a^2 - b)z^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = -\frac{y^2 + 2ayz + (a^2 - b)z^2}{2z},$$

et substituant cette valeur de x dans les expressions précédentes de X, Y et V, on aura des valeurs très-générales de ces quantités, qui satisferont à l'équation proposée.

Cette solution mérite d'être bien remarquée à cause de sa généralité et de la maniere dont nous y sommes parvenus, qui est peut-être l'unique qui puisse y conduire facilement.

On auroit de même la résolution de l'équation

$$X^{\text{I}3} + aX^{\text{I}2}Y^{\text{I}} + (a^2 - 2b)X^{\text{I}2}Z^{\text{I}} + bX^{\text{I}}Y^{\text{I}2} + (ab - 3c)X^{\text{I}}Y^{\text{I}}Z^{\text{I}} + (b^2 - 2ac)X^{\text{I}}Z^{\text{I}2}$$
$$+ cY^{\text{I}3} + acY^{\text{I}2}Z^{\text{I}} + bcY^{\text{I}}Z^{\text{I}2} + c^2Z^{\text{I}3} = V^3,$$

en faisant dans les formules ci-dessus

$$x^{\text{II}} = x^{\text{I}} = x, \quad y^{\text{II}} = y^{\text{I}} = y, \quad z^{\text{II}} = z^{\text{I}} = z,$$

et prenant

$$V = x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 + (ab - 3c)xyz + (b^2 - 2ac)xz^2$$
$$+ cy^3 + acy^2z + bcyz^2 + c^2z^3.$$

Et on pourroit résoudre aussi successivement les cas où, au lieu de la troisieme puissance V^3, on auroit V^4, V^5, etc. mais nous allons traiter ces questions d'une maniere tout-à-fait générale, comme nous l'avons fait dans l'art. 90 ci-dessus.

93. Soit donc proposé de résoudre une équation de cette forme,

$$X^3 + aX^2Y + (a^2 - 2b)X^2Z + bXY^2 + (ab - 3c)XYZ + (b^2 - 2ac)XZ^2$$
$$+ cY^3 + acY^2Z + bcYZ^2 + c^2Z^3 = V^m.$$

Puisque la quantité qui forme le premier membre de cette équation n'est autre chose que le produit de ces trois facteurs,

$$(X + \alpha Y + \alpha^2 Z)(X + \beta Y + \beta^2 Z)(X + \gamma Y + \gamma^2 Z),$$

il est clair que pour rendre cette quantité égale à une puissance du degré m, il ne faudra que rendre chacun de ses facteurs en particulier égal à une pareille puissance. Soit donc

$$X + \alpha Y + \alpha^2 Z = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^m;$$

on commencera par développer la puissance m de $x + \alpha y + \alpha^2 z$ par le théoreme de NEWTON, ce qui donnera

$$x^m + mx^{m-1}(y + \alpha z)\alpha + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}(y + \alpha z)^2\alpha^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}x^{m-3}(y + \alpha z)^3\alpha^3 +, \text{etc.}$$

ou bien, en formant les différentes puissances de $y + \alpha z$, et ordonnant ensuite par rapport aux dimensions de α,

$$x^m + mx^{m-1}y\alpha + \left(mx^{m-1}z + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2\right)\alpha^2$$
$$+ \left(m(m-1)x^{m-2}yz + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}x^{m-3}y^3\right)\alpha^3 +, \text{etc.}$$

Mais comme dans cette formule on ne voit pas aisément la loi des termes, nous supposerons en général

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)^m = P + P^{\text{I}}\alpha + P^{\text{II}}\alpha^2 + P^{\text{III}}\alpha^3 + P^{\text{IV}}\alpha^4 +, \text{etc.}$$

et l'on trouvera

$$
\begin{aligned}
P &= x^m,\\
P^{\mathrm{I}} &= \frac{myP}{x},\\
P^{\mathrm{II}} &= \frac{(m-1)yP^{\mathrm{I}}+2mzP}{2x},\\
P^{\mathrm{III}} &= \frac{(m-2)yP^{\mathrm{II}}+(2m-1)zP^{\mathrm{I}}}{3x},\\
P^{\mathrm{IV}} &= \frac{(m-3)yP^{\mathrm{III}}+(2m-2)zP^{\mathrm{II}}}{4x}, \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

c'est ce qui se démontre facilement par le calcul différentiel.

Maintenant on aura, à cause que α est une des racines de l'équation $s^3 - as^2 + bs - c = 0$, on aura, dis-je, $\alpha^3 - a\alpha^2 + b\alpha - c = 0$; d'où

$$\alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha + c;$$

donc

$$\alpha^4 = a\alpha^3 - b\alpha^2 + c\alpha = (a^2 - b)\alpha^2 - (ab - c)\alpha + ac,$$

$$\alpha^5 = (a^2 - b)\alpha^3 - (ab - c)\alpha^2 + ac\alpha = (a^3 - 2ab + c)\alpha^2 - (a^2b - b^2 - ac)\alpha + (a^2 - b)c,$$

et ainsi de suite.

De sorte que si on fait pour plus de simplicité

$$
\begin{aligned}
A^{\mathrm{I}} &= 0\\
A^{\mathrm{II}} &= 1\\
A^{\mathrm{III}} &= a\\
A^{\mathrm{IV}} &= aA^{\mathrm{III}} - bA^{\mathrm{II}} + cA^{\mathrm{I}}\\
A^{\mathrm{V}} &= aA^{\mathrm{IV}} - bA^{\mathrm{III}} + cA^{\mathrm{II}}\\
A^{\mathrm{VI}} &= aA^{\mathrm{V}} - bA^{\mathrm{IV}} + cA^{\mathrm{III}}, \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B^{\mathrm{I}} &= 1\\
B^{\mathrm{II}} &= 0\\
B^{\mathrm{III}} &= b\\
B^{\mathrm{IV}} &= aB^{\mathrm{III}} - bB^{\mathrm{II}} + cB^{\mathrm{I}}\\
B^{\mathrm{V}} &= aB^{\mathrm{IV}} - bB^{\mathrm{III}} + cB^{\mathrm{II}}\\
B^{\mathrm{VI}} &= aB^{\mathrm{V}} - bB^{\mathrm{IV}} + cB^{\mathrm{III}}, \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
C^{\mathrm{I}} &= 0\\
C^{\mathrm{II}} &= 0\\
C^{\mathrm{III}} &= c\\
C^{\mathrm{IV}} &= aC^{\mathrm{III}} - bC^{\mathrm{II}} + cC^{\mathrm{I}}\\
C^{\mathrm{V}} &= aC^{\mathrm{IV}} - bC^{\mathrm{III}} + cC^{\mathrm{II}}\\
C^{\mathrm{VI}} &= aC^{\mathrm{V}} - bC^{\mathrm{IV}} + cC^{\mathrm{III}}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned}
\alpha &= A^{\mathrm{I}}\alpha^2 - B^{\mathrm{I}}\alpha + C^{\mathrm{I}}\\
\alpha^2 &= A^{\mathrm{II}}\alpha^2 - B^{\mathrm{II}}\alpha + C^{\mathrm{II}}\\
\alpha^3 &= A^{\mathrm{III}}\alpha^2 - B^{\mathrm{III}}\alpha + C^{\mathrm{III}}\\
\alpha^4 &= A^{\mathrm{IV}}\alpha^2 - B^{\mathrm{IV}}\alpha + C^{\mathrm{IV}}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Substituant donc ces valeurs dans l'expression de

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)^m,$$

elle se trouvera composée de trois parties, l'une toute rationnelle, l'autre toute multipliée par α, et la troisieme toute multipliée par α^2; ainsi il n'y aura qu'à comparer la premiere à X, la seconde à αY, et la troisieme à $\alpha^2 Z$, et l'on aura par ce moyen

$$\begin{aligned}
X &= P + P^{\mathrm{I}}C^{\mathrm{I}} + P^{\mathrm{II}}C^{\mathrm{II}} + P^{\mathrm{III}}C^{\mathrm{III}} + P^{\mathrm{IV}}C^{\mathrm{IV}} +, \text{ etc.}\\
Y &= -P^{\mathrm{I}}B^{\mathrm{I}} - P^{\mathrm{II}}B^{\mathrm{II}} - P^{\mathrm{III}}B^{\mathrm{III}} - P^{\mathrm{IV}}B^{\mathrm{IV}} -, \text{ etc.}\\
Z &= P^{\mathrm{I}}A^{\mathrm{I}} + P^{\mathrm{II}}A^{\mathrm{II}} + P^{\mathrm{III}}A^{\mathrm{III}} + P^{\mathrm{IV}}A^{\mathrm{IV}} +, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Ces valeurs satisferont donc à l'équation

$$X + \alpha Y + \alpha^2 Z = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^m;$$

et comme la racine α n'entre point en particulier dans les expressions de X, Y et Z, il est clair qu'on pourra changer α en β, ou en γ; de sorte qu'on aura également

$$X + \beta Y + \beta^2 Z = (x + \beta y + \beta^2 z)^m,$$

et

$$X + \gamma Y + \gamma^2 Z = (x + \gamma y + \gamma^2 z)^m.$$

Or, multipliant ensemble ces trois équations, il est visible que le premier membre sera le même que celui de l'équation proposée, et que le second sera égal à une puissance m, dont la racine étant nommée V, on aura

$$V = x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 + (ab - 3c)xyz + (b^2 - 2ac)xz^2 \\ + cy^3 + acy^2z + bcyz^2 + c^2z^3.$$

Ainsi on aura les valeurs demandées de X, Y, Z et V, lesquelles renfermeront trois indéterminées x, y, z.

94. Si on vouloit trouver des formules de quatre dimensions qui eussent les mêmes propriétés que celles que nous venons d'examiner, il faudroit considérer le produit de quatre facteurs de cette forme,

$$\begin{gathered} x + \alpha y + \alpha^2 z + \alpha^3 t \\ x + \beta y + \beta^2 z + \beta^3 t \\ x + \gamma y + \gamma^2 z + \gamma^3 t \\ x + \delta y + \delta^2 z + \delta^3 t, \end{gathered}$$

en supposant que α, β, γ, δ fussent les racines d'une équation du quatrieme degré, telle que celle-ci,

$$s^4 - as^3 + bs^2 - cs + d = 0;$$

on aura ainsi

$$\begin{gathered} \alpha + \beta + \gamma + \delta = a, \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = b, \\ \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = c, \\ \alpha\beta\gamma\delta = d, \end{gathered}$$

moyennant quoi on pourra déterminer tous les coefficiens des différens termes du produit dont il s'agit, sans connoître les racines α, β, γ, δ en particulier. Mais comme il faudra faire pour cela différentes réductions qui peuvent ne pas se présenter facilement, on pourra s'y prendre, si on le juge plus commode, de la maniere que voici.

Qu'on suppose en général

$$x + sy + s^2z + s^3t = \varrho;$$

et comme s est déterminé par l'équation

$$s^4 - as^3 + bs^2 - cs + d = 0,$$

qu'on chasse s de ces deux équations par les regles connues, et l'équation résultante de l'évanouissement de s étant ordonnée par rapport à l'inconnue ϱ, montera au quatrieme degré; de sorte qu'elle pourra se mettre sous cette forme,

$$\varrho^4 - N\varrho^3 + P\varrho^2 - Q\varrho + R = 0.$$

Or cette équation en ϱ ne monte au quatrieme degré que parce que s peut avoir les quatre valeurs α, β, γ, δ et qu'ainsi ϱ peut avoir aussi ces quatre valeurs correspondantes,

$$\begin{gathered} x + \alpha y + \alpha^2 z + \alpha^3 t \\ x + \beta y + \beta^2 z + \beta^3 t \\ x + \gamma y + \gamma^2 z + \gamma^3 t \\ x + \delta y + \delta^2 z + \delta^3 t, \end{gathered}$$

lesquelles ne sont autre chose que les facteurs dont il s'agit d'avoir le produit. Donc, puisque le dernier terme R doit être le produit de toutes les quatre racines, ou valeurs de ϱ, il s'ensuit que cette quantité R sera le produit demandé.

Mais en voilà assez sur ce sujet, que nous pourrons peut-être reprendre dans une autre occasion.

Je terminerai ici ces Additions, que les bornes que je me suis prescrites ne me permettent pas d'étendre plus loin; peut-être même les trouvera-t-on déjà trop longues; mais les objets que j'y ai traités étant d'un genre assez nouveau et peu connu, j'ai cru devoir entrer dans plusieurs détails nécessaires pour se mettre bien au fait des méthodes que j'ai exposées, et de leurs différens usages.

FIN.