Die vorgegebene Formel war eigentlich $axx+b$, und weil gemeiniglich für x Brüche gefunden werden, so haben wir gesetzt $x=\frac{t}{u}$, also daß diese Formel $att+buu$ zu einem Quadrat gemacht werden soll.

Es giebt aber auch öfters unendlich viel Fälle wo so gar x in gantzen Zahlen gegeben werden kann, wie nun dieselben ausfindig zu machen, soll in dem folgenden Capitel gezeigt werden.

CAPITEL 6

VON DEN FÄLLEN IN GANZEN ZAHLEN DA DIE FORMEL $axx+b$ EIN QUADRAT WIRD

79.

Wir haben schon oben gewiesen wie solche Formeln $a+bx+cxx$ verwandelt werden sollen, daß das mittlere Glied wegfalle, und dahero begnügen wir uns die gegenwärtige Abhandlung nur auf diese Form $axx+b$ einzuschräncken, wobey es darauf ankommt, daß für x nur gantze Zahlen gefunden werden sollen aus welchen die Formel ein Quadrat wird. Vor allen Dingen aber ist nöthig, daß eine solche Formel an sich möglich sey, dann wäre sie unmöglich so könnten nicht einmahl Brüche für x, geschweige denn gantze Zahlen, statt finden.

80.

Man setze also diese Formel $axx+b=yy$, da dann beyde Buchstaben x und y gantze Zahlen seyn sollen, weil a und b dergleichen sind.

Zu diesem Ende ist unumgänglich nöthig, daß man schon einen Fall in gantzen Zahlen wiße oder errathen habe, dann sonsten würde alle Mühe überflüßig seyn mehr dergleichen Fälle zu suchen, weil vielleicht die Formel selbst unmöglich seyn möchte.

Wir wollen demnach annehmen daß diese Formel ein Quadrat werde wann man setzt $x=f$, und wollen das Quadrat durch gg andeuten, also daß $aff+b=gg$ wo demnach f und g bekante Zahlen sind. Es kommt also nur darauf an, wie aus diesem Fall noch andere Fälle hergeleitet werden können; und diese Untersuchung ist um so viel wichtiger, je mehr Schwierigkeiten dieselbe unterworfen ist, welche wir aber durch folgende Kunstgriffe überwinden werden.

81.

Da nun schon gefunden worden $aff + b = gg$, und über dieses auch seyn soll $axx + b = yy$, so subtrahire man jene Gleichung von dieser, um zu bekommen $axx - aff = yy - gg$, welche sich also durch Factoren ausdrücken läßt $a(x+f)(x-f) = (y+g)(y-g)$; man multiplicire beyderseits mit pq, so hat man $apq(x+f)(x-f) = pq(y+g)(y-g)$; um nun diese Gleichheit heraus zu bringen mache man diese Vertheilung

$$ap(x+f) = q(y+g) \quad \text{und} \quad q(x-f) = p(y-g),$$

und aus diesen beyden Gleichungen suche man die beyden Buchstaben x und y; die erste durch q dividirt giebt $y + g = \frac{apx + apf}{q}$; die andere durch p dividirt giebt $y - g = \frac{qx - qf}{p}$; diese von jener subtrahirt giebt $2g = \frac{(app-qq)x + (app+qq)f}{pq}$, mit pq multiplicirt wird $2pqg = (app - qq)x + (app + qq)f$, und dahero

$$x = \frac{2gpq}{app - qq} - \frac{(app + qq)f}{app - qq},$$

und hieraus findet man ferner $y = g + \frac{2gqq}{app - qq} - \frac{(app + qq)fq}{(app - qq)p} - \frac{qf}{p}$. Hier enthalten die zwey erstere Glieder den Buchstaben g, welche zusammen gezogen geben $\frac{g(app + qq)}{app - qq}$; die beyden andern enthalten den Buchstaben f und geben unter einer Benennung $-\frac{2afpq}{app - qq}$; dahero wir erhalten

$$y = \frac{g(app + qq) - 2afpq}{app - qq}.$$

82.

Diese Arbeit scheinet unserm Endzweck gar nicht gemäß zu sein, indem wir hier auf Brüche gerathen sind, da wir doch für x und y gantze Zahlen finden sollten, und es würde auf eine neue Frage ankommen was man für p und q für Zahlen annehmen müßte damit die Brüche wegfallen? welche Frage noch schwerer scheint als unsere Haupt-Frage. Allein es kann hier ein besonderer Kunstgrif angewendet werden, wodurch wir leicht zu unserm Endzweck gelangen: dann da hier alles in gantzen Zahlen ausgedrückt werden soll, so setze man $\frac{app + qq}{app - qq} = m$ und $\frac{2pq}{app - qq} = n$, damit man habe $x = ng - mf$ und $y = mg - naf$. Allein hier können wir m und n nicht nach Belieben nehmen, sondern sie müßen so bestimmt werden, daß den obigen Bestimmungen ein Genüge geschehe; zu diesem Ende laßt uns ihre Quadrate betrachten, da wir dann haben werden

$$mm = \frac{aap^4 + 2appqq + q^4}{aap^4 - 2appqq + q^4} \quad \text{und} \quad nn = \frac{4ppqq}{aap^4 - 2appqq + q^4}$$

dahero bekommen wir:

$$mm - ann = \frac{aap^4 + 2appqq + q^4 - 4appqq}{aap^4 - 2appqq + q^4} = \frac{aap^4 - 2appqq + q^4}{aap^4 - 2appqq + q^4} = 1.$$

83.

Hieraus sieht man, daß die beyden Zahlen m und n also beschaffen seyn müßen, daß $mm = ann + 1$. Da nun a eine bekante Zahl ist, so muß man vor allen Dingen darauf bedacht seyn eine solche gantze Zahl für n zu finden, daß $ann + 1$ ein Quadrat werde, von welchem hernach m die Wurzel ist, und so bald man eine solche gefunden, und über dieses auch die Zahl f gefunden, daß $aff + b$ ein Quadrat werde nemlich gg, so bekommt man vor x und y folgende Werthe in gantzen Zahlen

$$x = ng - mf, \quad \text{und} \quad y = mg - naf,$$

und dadurch wird $axx + b = yy$.

84.

Es ist vor sich klar, daß wann einmahl m und n gefunden worden, man dafür auch $-m$ und $-n$ schreiben könne, weil das Quadrat nn doch einerley bleibt.

Um dahero x und y in gantzen Zahlen zu finden, auf daß $axx + b = yy$ werde, so muß man vor allen Dingen einen solchen Fall schon haben, daß nemlich sey $aff + b = gg$; so bald dieser Fall bekant ist, so muß man noch zu der Zahl a solche Zahlen m und n suchen, daß $ann + 1 = mm$ werde, wozu in folgendem die Anleitung soll gegeben werden. Ist nun dieses geschehen, so hat man sogleich einen neuen Fall, nemlich $x = ng + mf$ und $y = mg + naf$, da dann seyn wird $axx + b = yy$.

Setzt man diesen neuen Fall an die Stelle des vorigen der für bekant angenommen worden und schreibt $ng + mf$ anstatt f und $mg + naf$ anstatt g, so bekommen wir für x und y wiederum neue Werthe, aus welchen weiter, wann sie für f und g gesetzt werden, andere neue heraus gebracht werden, und so immerfort, also daß wann man anfänglich nur einen solchen Fall gehabt, man daraus unendlich viel andere ausfindig machen kann.

85.

Die Art wie wir zu dieser Auflösung gelanget sind, war ziemlich mühsam und schien anfänglich von unserm Endzweck sich zu entfernen, indem wir auf ziemlich verwirrte Brüche geriethen, die durch ein besonders Glück haben weggeschaft werden können, es wird dahero gut seyn noch einen andern kürtzern Weg anzuzeigen, welcher uns zu eben dieser Auflösung führet.

86.

Da seyn soll $axx + b = yy$ und man schon gefunden hat $aff + b = gg$, so giebt uns jene Gleichung $b = yy - axx$, diese aber $b = gg - aff$, folglich muß auch seyn $yy - axx = gg - aff$, und jetzt kommt alles darauf an, daß man aus den bekanten Zahlen f und g die unbekanten x und y finden soll: da dann so gleich in die Augen fällt, daß diese Gleichung erhalten werde, wann man setzt $x = f$ und $y = g$; allein hieraus erhält man keinen neuen Fall außer den der schon für bekant genommen wird.

Wir wollen demnach setzen, man habe für n schon eine solche Zahl gefunden, daß $ann + 1$ ein Quadrat werde, oder daß da sey $ann + 1 = mm$, dahero wird nun $mm - ann = 1$, damit multiplicire man in der obigen Gleichung den Theil $gg - aff$ so muß auch seyn

$$yy - axx = (gg - aff)(mm - ann) = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn.$$

Laßt uns zu diesem Ende setzen $y = gm + afn$, so bekommen wir:

$$ggmm + 2afgmn + aaffnn - axx = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn,$$

wo sich die Glieder $ggmm$ und $aaffnn$ einander aufheben und wir also bekommen $axx = affmm + aggnn + 2afgmn$, welche Gleichung durch a getheilt giebt $xx = ffmm + ggnn + 2fgmn$, welche Formel offenbar ein Quadrat ist, daraus wir erhalten $x = fm + gn$, welches eben die Formeln sind die wir vorher gefunden haben.

87.

Es wird nun nöthig seyn diese Auflösung durch einige Exempel zu erläutern.

I. Frage: Man suche alle gantze Zahlen für x, also daß $2xx-1$ ein Quadrat werde, oder daß sey $2xx-1=yy$?

Hier ist $a=2$ und $b=-1$, der erste Fall so in die Augen fällt ist nun wann man nimmt $x=1$ und $y=1$. Aus diesem bekanten Falle haben wir nun $f=1$ und $g=1$; es wird aber ferner erfordert eine solche Zahl für n zu finden, daß $2nn+1$ ein Quadrat werde nemlich mm, solches geschiehet nun wann $n=2$ und $m=3$, dahero wir aus einem jeden bekanten Fall f und g diese neue finden $x=3f+2g$, und $y=3g+4f$; da nun der erste bekante Fall ist $f=1$ und $g=1$, so finden wir daraus folgende neue Fälle:

$x=f=1$	5	29	169	
$y=g=1$	7	41	239	etc.

88.

II. Frage: Man suche alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich Quadrat-Zahlen sind?

Es sey z die Drey-Ecks-Wurzel, so ist das Drey-Eck $\frac{zz+z}{2}$, welches ein Quadrat seyn soll. Die Wurzel davon sey x, so muß seyn $\frac{zz+z}{2}=xx$. Man multiplicire mit 8 so wird $4zz+4z=8xx$ und beyderseits 1 addirt, giebt $4zz+4z+1=(2z+1)^2=8xx+1$. Es kommt also darauf an, daß $8xx+1$ ein Quadrat werde, und wann man setzt $8xx+1=yy$, so wird $y=2z+1$, und also die gesetzte Drey-Eck-Wurzel $z=\frac{y-1}{2}$.

Hier ist nun $a=8$, und $b=1$, und der bekannte Fall fält so gleich in die Augen, nemlich $f=0$ und $g=1$. Damit ferner werde $8nn+1=mm$, so ist $n=1$ und $m=3$; dahero bekommt man $x=3f+g$ und $y=3g+8f$, und $z=\frac{y-1}{2}$; hieraus bekommen wir also folgende Auflösungen:

$x=\ f\ =0$	1	6	35	204	1189	
$y=\ g\ =1$	3	17	99	577	3363	
$z=\frac{y-1}{2}=0$	1	8	49	288	1681	etc.

89.

III. Frage: Man suche alle Fünf-Ecks-Zahlen welche zu gleich Quadrat-Zahlen sind?

Die Fünf-Ecks-Wurzel sey $= z$, so ist das Fünf-Eck $= \frac{3zz-z}{2}$, so dem Quadrat xx gleich gesetzt werde; dahero wird $3zz - z = 2xx$; man multiplicire mit 12 und addire 1, so wird $36zz - 12z + 1 = 24xx + 1 = (6z-1)^2$.

Setzt man nun $24xx + 1 = yy$, so ist $y = 6z - 1$ und $z = \frac{y+1}{6}$; da nun hier $a = 24$, $b = 1$, so ist der bekannte Fall $f = 0$ und $g = 1$. Da hernach seyn muß $24nn + 1 = mm$, so nehme man $n = 1$ und da wird $m = 5$, dahero erhalten wir $x = 5f + g$ und $y = 5g + 24f$, und $z = \frac{y+1}{6}$; oder auch $y = 1 - 6z$, so wird ebenfalls $z = \frac{1-y}{6}$, woraus folgende Auflösungen gefunden werden:

	$x = f = 0$	1	10	99	980
	$y = g = 1$	5	49	485	4801
	$z = \frac{y+1}{6} = \frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$
oder	$z = \frac{1-y}{6} = 0$	$-\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{242}{3}$	-800

90.

IV. Frage: Man suche alle Quadrate in gantzen Zahlen, welche sieben mal genommen und dazu 2 addirt wiederum Quadrate werden?

Hier wird also gefordert, daß seyn soll $7xx + 2 = yy$, wo $a = 7$ und $b = 2$; der bekante Fall fällt so gleich in die Augen, wann $x = 1$ und dann ist $x = f = 1$ und $y = g = 3$. Nun betrachte man die Gleichung $7nn + 1 = mm$, und da findet man leicht $n = 3$ und $m = 8$; dahero erhalten wir $x = 8f + 3g$ und $y = 8g + 21f$, woraus die folgenden Werthe für x und y gefunden werden:

$x = f = 1$	17	271
$y = g = 3$	45	717

91.

V. Frage: Man suche alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich fünfeckigte Zahlen sind?

Es sey die Drey-Ecks-Wurzel $= p$ und die Fünf-Ecks-Wurzel $= q$, so muß seyn $\frac{pp+p}{2} = \frac{3qq-q}{2}$, oder $3qq - q = pp + p$; hieraus suche man q, und da

$qq=\frac{1}{3}q+\frac{pp+p}{3}$, so wird $q=\frac{1}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{36}+\frac{pp+p}{3}\right)}$, das ist $q=\frac{1\pm\sqrt{(12pp+12p+1)}}{6}$. Es kommt also darauf an, daß $12pp+12p+1$ ein Quadrat werde, und das in gantzen Zahlen. Da nun hier das mittlere Glied $12p$ vorhanden ist, so setze man $p=\frac{x-1}{2}$; dadurch bekommen wir $12pp=3xx-6x+3$ und $12p=6x-6$, dahero $12pp+12p+1=3xx-2$, welches ein Quadrat seyn muß.

Setzen wir demnach $3xx-2=yy$, so haben wir daraus $p=\frac{x-1}{2}$ und $q=\frac{1+y}{6}$; da nun die gantze Sache auf die Formel $3xx-2=yy$ ankommt, so ist $a=3$ und $b=-2$, und der bekante Fall $x=f=1$ und $y=g=1$; hernach haben wir für diese Gleichung $mm=3nn+1$: $n=1$ und $m=2$, daraus wir folgende Werthe für x und y, und daher weiter für p und q, erhalten.

Da also ist $x=2f+g$ und $y=2g+3f$, so wird:

	$x=f=1$	3	11	41
	$y=g=1$	5	19	71
	$p=0$	1	5	20
	$q=\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	12
oder	$q=0$	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{35}{3}$

weil nemlich auch $q=\frac{1-y}{6}$ ist.

92.

Bisher waren wir gezwungen, aus der gegebenen Formel das zweyte Glied wegzuschaffen, wann eines vorhanden war: man kann aber auch die erste gegebene Methode auf solche Formeln anwenden, wo das mittlere Glied vorhanden ist, welches wir hier noch anzeigen wollen. Es sey demnach die vorgegebene Formel, die ein Quadrat seyn soll, diese $axx+bx+c=yy$, und hievon sey schon dieser Fall bekant $aff+bf+c=gg$.

Nun subtrahire man diese Gleichung von der obigen, so wird

$$a(xx-ff)+b(x-f)=yy-gg,$$

welche also durch Factores ausgedrückt werden kann

$$(x-f)(ax+af+b)=(y-g)(y+g).$$

Man multiplicire beyderseits mit pq, so wird

$$pq(x-f)(ax+af+b)=pq(y-g)(y+g),$$

welche in diese zwey zergliedert werden

$$\text{I.)}\ p(x-f)=q(y-g),\quad \text{II.)}\ q(ax+af+b)=p(y+g).$$

Man multiplicire die erste mit p, die andere mit q, und subtrahire jenes von diesem, so kommt $(aqq-pp)x+(aqq+pp)f+bqq=2gpq$, daraus finden wir

$$x=\frac{2gpq}{aqq-pp}-\frac{(aqq+pp)f}{aqq-pp}-\frac{bqq}{aqq-pp}.$$

Aus der ersten Gleichung ist

$$q(y-g)=p(x-f)=p\left(\frac{2gpq}{aqq-pp}-\frac{2afqq}{aqq-pp}-\frac{bqq}{aqq-pp}\right);$$

also

$$y-g=\frac{2gpp}{aqq-pp}-\frac{2afpq}{aqq-pp}-\frac{bpq}{aqq-pp},$$

und dahero

$$y=g\left(\frac{aqq+pp}{aqq-pp}\right)-\frac{2afpq}{aqq-pp}-\frac{bpq}{aqq-pp}.$$

Um diese Brüche wegzubringen, so setze man wie oben geschehen

$$\frac{aqq+pp}{aqq-pp}=m\quad\text{und}\quad\frac{2pq}{aqq-pp}=n,$$

so wird

$$m+1=\frac{2aqq}{aqq-pp}\quad\text{und also}\quad\frac{qq}{aqq-pp}=\frac{m+1}{2a};$$

also wird seyn

$$x=ng-mf-b\frac{(m+1)}{2a}\quad\text{und}\quad y=mg-naf-\frac{1}{2}bn,$$

wo die Buchstaben m und n eben so beschaffen seyn müssen, wie oben, nemlich daß $mm=ann+1$.

93.

Solcher Gestalt sind aber die für x und y gefundenen Formeln noch mit Brüchen vermengt, weil die den Buchstaben b enthaltende Glieder Brüche sind, und also unserm Endzweck kein Genüge leisten. Allein es ist zu mercken, daß wann man von diesen Werthen zu den folgenden fortschreitet, dieselben immer gantze Zahlen werden, welche man aber viel leichter aus den anfänglich eingeführten Zahlen p und q finden kann. Dann man nehme p und q dergestalt an, daß $pp=aqq+1$; da nun $aqq-pp=-1$, so fallen daselbst die Brüche von selbsten weg, und da wird

$$x=-2gpq+f(aqq+pp)+bqq\quad\text{und}\quad y=-g(aqq+pp)+2afpq+bpq,$$

weil aber in dem bekanten Fall $aff+bf+c=gg$ nur das Quadrat gg vorkommt, so ist es gleich viel ob man dem Buchstaben g das Zeichen $+$ oder $-$ giebt; man schreibe also $-g$ anstatt $+g$, so werden unsere Formeln seyn:

$$x=2gpq+f(aqq+pp)+bqq \quad \text{und} \quad y=g(aqq+pp)+2afpq+bpq,$$

da dann gewis seyn wird $axx+bx+c=yy$.

Man suche z. E. diejenigen Sechs-Eck-Zahlen, welche zu gleich Quadrate sind?

Da muß dann seyn $2xx-x=yy$, wo $a=2$, $b=-1$ und $c=0$; der bekante Fall ist hier offenbar $x=f=1$ und $y=g=1$.

Da hernach seyn muß $pp=2qq+1$, so wird $q=2$, und $p=3$; dahero wir erhalten $x=12g+17f-4$ und $y=17g+24f-6$; woraus folgende Werthe gefunden werden:

$x=f=1$	25	841	
$y=g=1$	35	1189	etc.

94.

Wir wollen aber bey der ersten Formel, wo das mittlere Glied fehlt, noch etwas stehen bleiben und die Fälle in Erwegung ziehen, wo die Formel $axx+b$ ein Quadrat wird in gantzen Zahlen.

Es sey demnach $axx+b=yy$ und hiezu werden zwey Stücke erfordert:

Erstlich daß man einen Fall wiße, wo dieses geschiehet: derselbe sey nun $aff+b=gg$.

Zweytens daß man solche Zahlen für m und n wiße, daß $mm=ann+1$, wozu in folgendem Capitel die Anleitung gegeben werden soll.

Hieraus erhält man nun einen neuen Fall, nemlich $x=ng+mf$ und $y=mg+anf$, aus welchem hernach gleicher Gestalt neue Fälle gefunden werden können, welche wir folgender Gestalt vorstellen wollen:

$x=f$	A	B	C	D	E	
$y=g$	P	Q	R	S	T	etc.

wo	$A=ng+mf$	$B=nP+mA$	$C=nQ+mB$	$D=nR+mC$	
und	$P=mg+anf$	$Q=mP+anA$	$R=mQ+anB$	$S=mR+anC$	etc.

welche beyde Reihen Zahlen man mit leichter Mühe so weit fortsetzen kann als man will.

95.

Nach dieser Art aber kann man weder die obere Reihe für x fortsetzen ohne zugleich die untere zu wißen, noch die untere ohne die obere zu wißen. Man kann aber leicht eine Regel angeben die obere Reihe allein fortzusetzen ohne die untere zu wißen. welche Regel auch für die untere Reihe gilt ohne daß man nöthig hätte die obere zu wißen.

Die Zahlen nemlich, welche für x gesetzt werden können, schreiten nach einer gewißen Progression fort wovon man ein jedes Glied z. E. E aus den zwey vorhergehenden C und D, bestimmen kann, ohne dazu die untern Glieder R und S nöthig zu haben. Dann da

$$E = nS + mD = n(mR + anC) + m(nR + mC), \text{ das ist}$$

$$E = 2mnR + annC + mmC, \text{ so wird, weil } nR = D - mC, \text{ gefunden}$$

$$E = 2mD - mmC + annC \text{ oder } E = 2mD - (mm - ann)C;$$

da aber $mm = ann + 1$ also $mm - ann = 1$, so haben wir

$$E = 2mD - C,$$

woraus erhellet wie eine jede dieser obern Zahlen aus den zwey vorhergehenden bestimmt wird.

Eben so verhält es sich auch mit der untern Reihe. Dann da

$$T = mS + anD, \text{ und } D = nR + mC, \text{ so wird } T = mS + annR + amnC.$$

Da nun ferner $S = mR + anC$, so ist $anC = S - mR$, welcher Werth für anC geschrieben giebt,

$$T = 2mS - R,$$

also daß die untere Reihe nach eben der Regel fortschreitet als die obere.

Man suche z. E. alle gantze Zahlen x, daß da werde $2xx - 1 = yy$. Da ist nun $f = 1$ und $g = 1$; ferner damit $mm = 2nn + 1$, so wird $n = 2$ und $m = 3$. Da nun $A = ng + mf = 5$, so sind die zwey ersten Glieder 1 und 5, aus welchen die folgenden nach dieser Regel gefunden werden $E = 6D - C$, nemlich ein jedes Glied sechsmal genommen weniger dem vorhergehenden giebt das folgende; dahero die für x verlangte Zahlen nach dieser Regel also fortgehen:

$$1, \quad 5, \quad 29, \quad 169, \quad 985, \quad 5741 \text{ etc.}$$

Woraus man sieht daß diese Zahlen unendlich weit fortgesetzt werden können. Wollte man aber auch Brüche gelten laßen, so würde nach der oben gegebenen Methode eine noch unendlich größere Menge angegeben werden können.