

Man setze z. E.  $m = 3$  und  $n = 1$ , so wird  $x = -\frac{3}{2}$  und unsere Formel  $7xx + 15x + 13 = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$ . Es sey ferner  $m = 1$  und  $n = 1$ , so wird  $x = -\frac{17}{6}$ . Nimmt man  $m = 3$  und  $n = -1$ , so wird  $x = \frac{129}{2}$  und unsere Formel

$$7xx + 15x + 13 = \frac{120409}{4} = \left(\frac{347}{2}\right)^2.$$

62.

Bisweilen aber ist alle Mühe umsonst einen Fall zu errathen, in welchem die vorgegebene Formel ein Quadrat wird, wie z. E. bey dieser geschieht  $3xx + 2$ , oder wann man für  $x$  schreibt  $\frac{t}{u}$ , dieser  $3tt + 2uu$ , welche man mag auch für  $t$  und  $u$  Zahlen annehmen die man will, niemahls ein Quadrat wird. Dergleichen Formeln, welche auf keinerley Weise zu einem Quadrat gemacht werden können, giebt es unendlich viel, und deswegen wird es der Mühe werth seyn einige Kennzeichen anzugeben, woraus die Unmöglichkeit erkannt werden kann, damit man öfters der Mühe überhoben seyn möge, durch Rathen solche Fälle zu finden wo ein Quadrat herauskommt, wozu das folgende Capitel bestimmt ist.

## CAPITEL 5

VON DEN FÄLLEN DA DIE FORMEL  $a + bx + cxx$  NIEMAHLS EIN QUADRAT WERDEN KANN

63.

Da unsere allgemeine Formel aus drey Gliedern besteht, so ist zu bemerken, daß dieselbe immer in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das mittlere Glied mangelt. Dieses geschieht wann man setzt  $x = \frac{y-b}{2c}$ , dadurch bekommt unsere Formel diese Gestalt

$$a + \frac{by-bb}{2c} + \frac{yy-2by+bb}{4c}, \quad \text{oder} \quad \frac{4ac-bb+yy}{4c}.$$

Soll diese ein Quadrat werden, so setze man dasselbe  $= \frac{zz}{4}$ , so wird

$$4ac - bb + yy = czz \quad \text{folgich} \quad yy = czz + bb - 4ac.$$

Wann also unsere Formel ein Quadrat seyn soll, so wird auch diese

$$czz + bb - 4ac$$

ein Quadrat und umgekehrt, wann diese ein Quadrat wird, so wird auch die obige ein Quadrat; folglich wann man für  $bb - 4ac$  schreibt  $t$ , so kommt es darauf an ob eine solche Formel  $czz + t$  ein Quadrat werden könne oder nicht? und da diese Formel nur aus zwey Gliedern besteht, so ist es ohnstreitig weit leichter die Möglichkeit oder Unmöglichkeit derselben zu beurtheilen, welches aus der Beschaffenheit der beyden gegebenen Zahlen  $c$  und  $t$  geschehen muß.

## 64.

Wann  $t = 0$  ist, so ist offenbar, daß die Formel  $czz$  nur alsdann ein Quadrat werde, wann die Zahl  $c$  ein Quadrat ist. Dann da ein Quadrat durch ein ander Quadrat dividirt, wieder ein Quadrat wird, so kann  $czz$  kein Quadrat seyn, wofern nicht  $\frac{czz}{zz}$ , das ist  $c$ , ein Quadrat ist. Also wann die Zahl  $c$  kein Quadrat ist, so kann auch die Formel  $czz$  auf keinerlei Weise ein Quadrat werden. Ist aber  $c$  vor sich eine Quadrat-Zahl, so ist auch  $czz$  ein Quadrat, man mag für  $z$  annehmen was man will.

## 65.

Um andere Fälle beurtheilen zu können, so müssen wir dasjenige zu Hülfe nehmen, was oben von den verschiedenen Arten der Zahlen in Ansehung eines jeglichen Theilers angeführt worden.

Also in Ansehung des Theilers 3 sind die Zahlen von dreyerley Art: die erste begreift diejenigen Zahlen, welche sich durch 3 theilen lassen und durch diese Formel  $3n$  vorgestellt werden.

Zu der andern Art gehören diejenigen, welche durch 3 dividirt 1 übrig lassen, und in dieser Formel  $3n + 1$  enthalten sind.

Die dritte Art aber begreift die Zahlen in sich, welche durch 3 dividirt 2 übrig lassen, und durch diese Formel  $3n + 2$  vorgestellt werden.

Da nun alle Zahlen in einer von diesen 3 Formeln enthalten sind, so wollen wir die Quadraten davon betrachten.

Ist die Zahl in der Formel  $3n$  enthalten, so ist ihr Quadrat  $9nn$ , welches sich also nicht nur durch 3 sondern so gar durch 9 theilen läßt.

Ist die Zahl in der Formel  $3n + 1$  enthalten, so ist ihr Quadrat

$$9nn + 6n + 1,$$

welches durch 3 dividirt giebt  $3nn + 2n$  und 1 zum Rest läßt, und also auch zur zweyten Art  $3n + 1$  gehöret.

Ist endlich die Zahl in dieser Formel  $3n + 2$  enthalten, so ist ihr Quadrat

$$9nn + 12n + 4,$$

welches durch 3 dividirt, gibt  $3nn + 4n + 1$ , und 1 im Rest läßt, und also auch zu der zweyten Art  $3n + 1$  gehöret: daher ist klar, daß alle Quadrat-Zahlen in Ansehung des Theilers 3 nur von zweyerley Arten sind. Dann entweder laßen sich dieselben durch 3 theilen, und alsdann müßen sie sich auch nothwendig durch 9 theilen laßen; oder wann sie sich nicht durch 3 theilen laßen, so bleibt allezeit nur 1 im Rest, niemals aber 2. Daher keine Zahl, die in der Form  $3n + 2$  enthalten ist, ein Quadrat seyn kann.

## 66.

Hieraus können wir nun leicht zeigen, daß die Formel  $3xx + 2$  niemals ein Quadrat werden kann, man mag für  $x$  eine gantze Zahl oder einen Bruch setzen. Dann wann  $x$  eine ganze Zahl ist und man theilt diese Formel  $3xx + 2$  durch 3 so bleiben 2 übrig, daher diese Formel kein Quadrat seyn kann. Wann aber  $x$  ein Bruch ist, so setze man  $x = \frac{t}{u}$ , von welchem Bruch wir annehmen können, daß derselbe schon in seine kleinste Form gebracht worden, und also  $t$  und  $u$  keinen gemeinen Theiler haben außer 1. Sollte nun  $\frac{3tt}{uu} + 2$  ein Quadrat seyn, so müßte dieselbe auch mit  $uu$  multiplicirt, das ist diese  $3tt + 2uu$  ein Quadrat seyn, dieses aber kann ebenfalls nicht geschehen. Dann entweder läßt sich die Zahl  $u$  durch 3 theilen oder nicht: läßt sie sich theilen, so läßt sich  $t$  nicht theilen weil sonst  $t$  und  $u$  einen gemeinen Theiler hätten.

Man setze daher  $u = 3f$ , so wird unsere Formel  $3tt + 18ff$ , welche durch 3 getheilt giebt  $tt + 6ff$ , so sich nicht weiter durch 3 theilen läßt, wie zu einem Quadrat erfordert wird, weil sich zwar  $6ff$  theilen läßt,  $tt$  aber durch 3 dividirt 1 übrig läßt.

Läßt sich aber  $u$  nicht durch 3 theilen, so sehe man was übrig bleibt. Weil sich das erste Glied durch 3 theilen läßt, so kommt es mit dem Rest bloß auf das zweyte Glied  $2uu$  an. Nun aber  $uu$  durch 3 dividirt 1 im Rest hat, oder eine Zahl ist von dieser Art  $3n + 1$ , so wird  $2uu$  eine Zahl von dieser Art  $6n + 2$  seyn, und also durch 3 dividirt 2 übrig lassen: daher unsere Formel  $3tt + 2uu$  durch 3 dividirt, 2 übrig läßt, und also gewiß keine Quadrat-Zahl seyn kann.

## 67.

Eben so kann man beweisen, daß auch diese Formel  $3tt + 5uu$  niemals ein Quadrat seyn kann, und so gar auch keine von diesen:  $3tt + 8uu$ ,  $3tt + 11uu$ ,  $3tt + 14uu$  etc. wo die Zahlen 5, 8, 11, 14 etc. durch 3 dividirt 2 übrig lassen. Dann wäre  $u$  durch 3 theilbar, folglich  $t$  nicht, und man setze  $u = 3s$ , so würde die Formel durch 3 nicht aber durch 9 theilbar seyn. Wäre  $u$  nicht durch 3 theilbar und also  $uu$  eine Zahl von dieser Art  $3n + 1$ , so wäre zwar das erste Glied  $3tt$  durch 3 theilbar, das andere aber  $5uu$  von dieser Form  $15n + 5$ , oder  $8uu$  von dieser Form  $24n + 8$ , oder  $11uu$  von dieser  $33n + 11$  etc. würde durch 3 dividirt 2 übrig laßen und also kein Quadrat seyn können.

## 68.

Dieses gilt also auch von dieser allgemeinen Formel  $3tt + (3n + 2)uu$ , welche nimmermehr ein Quadrat werden kann, und auch nicht wann für  $n$  negative Zahlen gesetzt würden. Also wann  $n = -1$ , so ist es unmöglich, diese Formel  $3tt - uu$  zu einem Quadrat zu machen. Dann wann  $u$  durch 3 theilbar ist, so ist die Sache offenbar, wäre aber  $u$  nicht theilbar durch 3, so würde  $uu$  eine Zahl von dieser Art  $3n + 1$ , und also unsere Formel seyn  $3tt - 3n - 1$ , welche durch 3 dividirt übrig läßt  $-1$ , oder um 3 mehr,  $+2$  übrig läßt. Man setze überhaupt  $n = -m$  so wird unsere Formel  $3tt - (3m - 2)uu$ , welche auch nimmermehr ein Quadrat werden kann.

## 69.

Hierzu hat uns nun die Betrachtung des Theilers 3 geführt; wir wollen daher auch 4 als einen Theiler betrachten, da dann alle Zahlen in einer von diesen vier Formeln:

$$\text{I. } 4n, \quad \text{II. } 4n + 1, \quad \text{III. } 4n + 2, \quad \text{IV. } 4n + 3,$$

enthalten sind. Von den Zahlen der ersten Art ist das Quadrat  $16nn$  und läßt sich also durch 16 theilen. Ists eine Zahl von der zweyten Art  $4n + 1$ , so ist ihr Quadrat  $16nn + 8n + 1$ , welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt und gehört also zu dieser Formel  $8n + 1$ . Ists eine Zahl von der dritten Art  $4n + 2$  so ist ihr Quadrat  $16nn + 16n + 4$ , welche durch 16 dividirt 4 übrig läßt, und also in dieser Form  $16n + 4$  enthalten ist. Ists endlich eine Zahl von der vierten Art  $4n + 3$ , so ist ihr Quadrat  $16nn + 24n + 9$ , welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt.

## 70.

Hieraus lernen wir folgendes, erstlich daß alle gerade Quadrat-Zahlen in dieser Form  $16n$  oder in dieser  $16n + 4$  enthalten sind; folglich alle übrige gerade Formeln, nemlich  $16n + 2$ ;  $16n + 6$ ;  $16n + 8$ ;  $16n + 10$ ;  $16n + 12$ ;  $16n + 14$  können niemals Quadrat-Zahlen seyn.

Hernach von den ungeraden Quadraten ersehen wir, daß alle in dieser einzigen Formel  $8n + 1$  enthalten sind, oder durch 8 dividirt 1 im Rest laßen. Dahero alle übrige ungerade Zahlen welche in einer von dieser Formel  $8n + 3$ ;  $8n + 5$ ;  $8n + 7$  enthalten sind, können niemals Quadrate werden.

## 71.

Aus diesem Grund können wir auch wiederum zeigen, daß diese Formel  $3tt + 2uu$  kein Quadrat seyn kann. Dann entweder sind beyde Zahlen  $t$  und  $u$  ungerade, oder die eine ist gerad und die andere ist ungerad, weil beyde zugleich nicht gerad seyn können, indem sonst 2 ihr gemeiner Theiler seyn würde. Wären beyde ungerad, und folglich so wohl  $tt$  als  $uu$  in dieser Form  $8n + 1$  enthalten, so würde das erste Glied  $3tt$  durch 8 dividirt 3 übrig laßen, das andere Glied aber 2 übrig laßen, beyde zusammen aber würden 5 übrig laßen, und also kein Quadrat seyn. Wäre aber  $t$  eine gerade Zahl und  $u$  ungerade, so würde sich das erste Glied  $3tt$  durch 4 theilen laßen, das andere aber  $2uu$  würde durch 4 dividirt 2 übrig laßen, also beyde zusammen würden 2 übrig laßen und also kein Quadrat seyn. Wäre aber endlich  $u$  gerad nemlich  $u = 2s$ , aber  $t$  ungerad und folglich  $tt = 8n + 1$ , so würde unsere Formel seyn  $24n + 3 + 8ss$ , welche durch 8 dividirt 3 übrig läßt, und also kein Quadrat seyn kann.

Eben dieser Beweis läßt sich auch auf diese Formel ausdehnen

$$3tt + (8n + 2)uu; \text{ imgleichen auch auf diese } (8m + 3)tt + 2uu,$$

und auch so gar auf diese  $(8m + 3)tt + (8n + 2)uu$ , wo für  $m$  und  $n$  alle gantze Zahlen so wohl positive als negative genommen werden können.

## 72.

Wir gehen solcher Gestalt weiter zum Theiler 5, in Ansehung dessen alle Zahlen in einer von diesen fünf Formeln:

$$\text{I. } 5n, \quad \text{II. } 5n + 1, \quad \text{III. } 5n + 2, \quad \text{IV. } 5n + 3, \quad \text{V. } 5n + 4$$

enthalten sind. Ist nun eine Zahl von der ersten Art, so ist ihr Quadrat  $25nn$ , welches nicht nur durch 5 sondern auch durch 25 theilbahr ist.

Ist eine Zahl von der zweyten Art, so ist ihr Quadrat  $25nn + 10n + 1$ , welches durch 5 dividirt 1 übrig läßt und also in dieser Formel  $5n + 1$  enthalten ist.

Ist eine Zahl von der dritten Art, so ist ihr Quadrat  $25nn + 20n + 4$ ; welches durch 5 dividirt 4 übrig läßt.

Ist eine Zahl von der vierten Art, so ist ihr Quadrat  $25nn + 30n + 9$ , welches durch 5 dividirt 4 übrig läßt.

Ist endlich eine Zahl von der fünften Art, so ist ihr Quadrat  $25nn + 40n + 16$ , welches durch 5 dividirt 1 übrig läßt. Wann daher eine Quadrat-Zahl sich nicht durch 5 theilen läßt, so ist der Rest immer entweder 1 oder 4, niemals aber 2 oder 3; daher in diesen Formeln  $5n + 2$  und  $5n + 3$  kein Quadrat enthalten seyn kann.

## 73.

Aus diesem Grund können wir auch beweisen, daß weder die Formel  $5tt + 2uu$  noch diese  $5tt + 3uu$  ein Quadrat werden könne. Dann entweder ist  $u$  durch 5 theilbar oder nicht: im erstern Fall würden sich diese Formeln durch 5, nicht aber durch 25 theilen laßen, und also auch keine Quadrate seyn können. Ist aber  $u$  nicht theilbar durch 5, so ist  $uu$  entweder  $5n + 1$  oder  $5n + 4$ , im erstern Fall wird die erste Formel  $5tt + 10n + 2$ , welche durch 5 getheilt 2 übrig läßt; die andere aber wird  $5tt + 15n + 3$ , welche durch 5 getheilt 3 übrig läßt, und also keine ein Quadrat seyn kann. Ist aber  $uu = 5n + 4$ , so wird die erste Formel  $5tt + 10n + 8$ , welche durch 5 dividirt 3 übrig läßt; die andere aber wird  $5tt + 15n + 12$ , welche durch 5 dividirt 2 übrig läßt, und also auch in diesem Fall kein Quadrat werden kann.

Aus eben diesem Grund siehet man auch, daß weder diese Formel  $5tt + (5n + 2)uu$  noch diese  $5tt + (5n + 3)uu$  ein Quadrat sein kann, weil eben dieselben Reste als vorher überbleiben, man kann auch so gar im ersten Glied  $5mtt$  anstatt  $5tt$  schreiben, wann nur  $m$  nicht durch 5 theilbar ist.

## 74.

Wie alle gerade Quadraten in dieser Form  $4n$ , alle ungerade aber in dieser Form  $4n + 1$  enthalten sind, und also weder  $4n + 2$ , noch  $4n + 3$  ein Quadrat seyn kann, so folgt daraus, daß diese allgemeine Formel

$(4m + 3)tt + (4n + 3)uu$  niemals ein Quadrat seyn kann. Dann wäre  $t$  gerad so würde sich  $tt$  durch 4 theilen laßen, das andere Glied aber würde durch 4 dividirt 3 übrig lassen; wären aber beyde Zahlen  $t$  und  $u$  ungerad, so würden die Reste von  $tt$  und  $uu$  1 seyn, also von der gantzen Formel würde der Rest seyn 2. Nun aber ist keine Zahl welche durch 4 dividirt 2 übrig läßt, ein Quadrat; hier ist auch zu mercken, daß so wohl  $m$  als  $n$  negativ, und auch  $= 0$  genommen werden kann, dahero weder diese Formel  $3tt + 3uu$  noch diese  $3tt - uu$  ein Quadrat seyn kann.

## 75.

Wie wir von den bisherigen Theilern gefunden haben, daß einige Arten der Zahlen niemals Quadrate seyn können, so gilt dieses auch bey allen andern Theilern, daß sich immer einige Arten finden die keine Quadrate seyn können.

Es sey der Theiler 7, so sind alle Zahlen in einer der folgenden sieben Arten enthalten, von welchen wir auch die Quadraten untersuchen wollen.

Arten der Zahlen	ihre Quadraten	gehören zu der Art
I. $7n$	$49nn$	$7n$
II. $7n + 1$	$49nn + 14n + 1$	$7n + 1$
III. $7n + 2$	$49nn + 28n + 4$	$7n + 4$
IV. $7n + 3$	$49nn + 42n + 9$	$7n + 2$
V. $7n + 4$	$49nn + 56n + 16$	$7n + 2$
VI. $7n + 5$	$49nn + 70n + 25$	$7n + 4$
VII. $7n + 6$	$49nn + 84n + 36$	$7n + 1$

Da nun die Quadraten, die sich nicht durch 7 theilen lassen, in einer von diesen drey Arten enthalten seyn müssen  $7n + 1$ ,  $7n + 2$ ,  $7n + 4$ , so werden die drey andern Arten von der Natur der Quadrate gänzlich ausgeschlossen. Diese Arten sind nun  $7n + 3$ ,  $7n + 5$ ,  $7n + 6$ , und der Grund davon ist offenbahr, weil sich immer zwey Arten finden davon die Quadraten zu einer Gattung gehören.

## 76.

Um dieses deutlicher zu zeigen, so bemercke man daß die letzte Art  $7n + 6$  auch also  $7n - 1$  ausgedrückt werden kann; eben so ist auch die

Formel  $7n + 5$  mit dieser  $7n - 2$  einerley, und  $7n + 4$  ist ebenso viel als  $7n - 3$ . Nun aber ist offenbar, daß von diesen zwey Arten der Zahlen  $7n + 1$  und  $7n - 1$  die Quadrate durch 7 dividirt einerley übrig lassen nemlich 1; eben so sind auch die Quadraten dieser beyden Arten  $7n + 2$  und  $7n - 2$  von einerley Gattung.

## 77.

Ueberhaupt also, wie auch immer der Theiler beschaffen seyn mag, welchen wir mit dem Buchstaben  $d$  andeuten wollen, sind die daher entstehenden verschiedene Arten der Zahlen folgende

$$dn, dn + 1, dn + 2, dn + 3 \text{ etc. } dn - 1, dn - 2, dn - 3 \text{ etc.}$$

wo die Quadrate von  $dn + 1$  und  $dn - 1$  dieses gemein haben, daß sie durch  $d$  dividirt 1 übrig laßen, und also beyde zu einer Art nemlich zu  $dn + 1$  gehören. Eben so verhält es sich auch mit den beyden Arten  $dn + 2$  und  $dn - 2$ , deren Quadrate zu der Art  $dn + 4$  gehören.

Und also überhaupt gilt es auch von diesen zwey Arten  $dn + a$  und  $dn - a$ , deren Quadrate durch  $d$  dividirt einerley übrig lassen nemlich  $aa$ ; oder so viel als übrig bleibt, wann man  $aa$  durch  $d$  theilt.

## 78.

Auf diese Weise erhält man also eine unendliche Menge solcher Formeln  $att + buu$  welche auf keinerley Weise Quadrate werden können. Also aus dem Theiler 7 erkennt man leicht, daß keine von diesen drey Formeln

$$7tt + 3uu, \quad 7tt + 5uu \quad \text{und} \quad 7tt + 6uu$$

jemals ein Quadrat werden kann, weil  $uu$  durch 7 dividirt entweder 1 oder 2 oder 4 übrig läßt; ferner weil bey der ersten entweder 3 oder 6 oder 5, bey der zweyten entweder 5 oder 3 oder 6, bey der dritten entweder 6 oder 5 oder 3 übrig blieb, welches bey keinem Quadrat geschehen kann. Wann nun dergleichen Formeln vorkommen, so ist alle Mühe vergebens, die man sich geben wollte, um irgend einen Fall zu errathen, wo ein Quadrat herauskommen möchte, und deswegen ist diese Betrachtung von großer Wichtigkeit.

Ist aber eine vorgegebene Formel nicht von dieser Beschaffenheit, und man kann einen einigen Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird, so ist in dem vorigen Capitel schon gezeigt worden, wie daraus unendlich viel andere Fälle gefunden werden sollen.



Die vorgegebene Formel war eigentlich  $axx + b$ , und weil gemeiniglich für  $x$  Brüche gefunden werden, so haben wir gesetzt  $x = \frac{t}{u}$ , also daß diese Formel  $att + buu$  zu einem Quadrat gemacht werden soll.

Es giebt aber auch öfters unendlich viel Fälle wo so gar  $x$  in gantzen Zahlen gegeben werden kann, wie nun dieselben ausfindig zu machen, soll in dem folgenden Capitel gezeigt werden.

## CAPITEL 6

VON DEN FÄLLEN IN GANZEN ZAHLEN DA DIE FORMEL  $axx + b$  EIN QUADRAT WIRD

## 79.

Wir haben schon oben gewiesen wie solche Formeln  $a + bx + cxx$  verwandelt werden sollen, daß das mittlere Glied wegfalle, und dahero begnügen wir uns die gegenwärtige Abhandlung nur auf diese Form  $axx + b$  einzuschräncken, wobey es darauf ankommt, daß für  $x$  nur gantze Zahlen gefunden werden sollen aus welchen die Formel ein Quadrat wird. Vor allen Dingen aber ist nöthig, daß eine solche Formel an sich möglich sey, dann wäre sie unmöglich so könnten nicht einmahl Brüche für  $x$ , geschweige denn gantze Zahlen, statt finden.

## 80.

Man setze also diese Formel  $axx + b = yy$ , da dann beyde Buchstaben  $x$  und  $y$  gantze Zahlen seyn sollen, weil  $a$  und  $b$  dergleichen sind.

Zu diesem Ende ist unumgänglich nöthig, daß man schon einen Fall in gantzen Zahlen wiße oder errathen habe, dann sonsten würde alle Mühe überflüßig seyn mehr dergleichen Fälle zu suchen, weil vielleicht die Formel selbst unmöglich seyn möchte.

Wir wollen demnach annehmen daß diese Formel ein Quadrat werde wann man setzt  $x = f$ , und wollen das Quadrat durch  $gg$  andeuten, also daß  $aff + b = gg$  wo demnach  $f$  und  $g$  bekante Zahlen sind. Es kommt also nur darauf an, wie aus diesem Fall noch andere Fälle hergeleitet werden können; und diese Untersuchung ist um so viel wichtiger, je mehr Schwierigkeiten dieselbe unterworfen ist, welche wir aber durch folgende Kunstgriffe überwinden werden.