CAPITEL 4

VON DER ART DIESE IRRATIONALE FORMELN $\sqrt{(a+bx+cxx)}$ RATIONAL ZU MACHEN

38.

Hier ist also die Frage was für Werthe für x angenommen werden sollen, daß diese Formel $a+bx+cxx$ ein wirckliches Quadrat werde, und also die Quadrat-Wurzel daraus rational angegeben werden könne. Es bedeuten aber die Buchstaben a, b und c gegebene Zahlen, und auf der Beschaffenheit derselben beruhet hauptsächlich die Bestimmung der unbekanten Zahl x, wobey zum voraus zu bemercken, daß in vielen Fällen die Auflösung davon unmöglich werde; wann aber dieselbe möglich ist, so muß man sich zum wenigsten anfänglich in Bestimmung des Buchstabens x blos mit rationalen Werthen begnügen, und nicht fordern, daß dieselben so gar gantze Zahlen seyn sollen, als welches eine gantz besondere Untersuchung erfordert.

39.

Wir nehmen hier an, daß diese Formel nur bis zur zweyten Potestät von x steige, indem höhere Potestäten besondere Methoden erfordern, wovon hernach gehandelt werden soll.

Sollte hier nicht einmahl die zweyte Potestät vorkommen, und $c=0$ seyn, so hätte die Frage gar keine Schwierigkeit: dann wann diese Formel $\sqrt{(a+bx)}$ gegeben wäre, und man x so bestimmen sollte, daß $a+bx$ ein Quadrat würde, so dürfte man nur setzen $a+bx=yy$, woraus man so gleich erhielte $x=\frac{yy-a}{b}$; und nun möchte man für y alle beliebige Zahlen annehmen, und aus einer jeden würde man einen solchen Werth für x finden, daß $a+bx$ ein Quadrat und folglich $\sqrt{(a+bx)}$ rational herauskäme.

40.

Wir wollen demnach bey dieser Formel anfangen $\sqrt{(1+xx)}$, wo solche Werthe für x gefunden werden sollen, daß wann zu ihrem Quadrat xx noch 1 addirt wird, die Summe wiederum ein Quadrat werde, welches offenbar in gantzen Zahlen nicht geschehen kann, indem keine gantze Quadrat-Zahl nur um 1 größer ist als die vorhergehende, dahero man sich nothwendig mit gebrochenen Zahlen für x begnügen muß.

41.

Weil $1+xx$ ein Quadrat seyn soll, und man setzen wollte $1+xx=yy$, so würde $xx=yy-1$ und $x=\sqrt{(yy-1)}$. Um also x zu finden, müßte man solche Zahlen für y suchen, daß ihre Quadrate weniger 1 wiederum Quadrate würden, welche Frage eben so schwer ist als die vorige und würde also hierdurch nichts gewonnen.

Daß es aber würcklich solche Brüche gebe, welche für x gesetzt $1+xx$ zum Quadrat machen, kann man aus folgenden Fällen ersehen:

I.) wann $x=\frac{3}{4}$ so wird $1+xx=\frac{25}{16}$, folglich $\sqrt{(1+xx)}=\frac{5}{4}$.

II.) Eben dieses geschieht wann $x=\frac{4}{3}$ wo $\sqrt{(1+xx)}=\frac{5}{3}$ herauskommt.

III.) Hernach wann man setzt $x=\frac{5}{12}$ so erhält man $1+xx=\frac{169}{144}$, wovon die Quadrat-Wurzel ist $\frac{13}{12}$.

Wie nunmehr dergleichen Zahlen und so gar alle mögliche gefunden werden sollen, muß hier gezeigt werden.

42.

Solches kann auf zweyerley Art geschehen. Nach der ersten Art setze man $\sqrt{(1+xx)}=x+p$ so wird $1+xx=xx+2px+pp$, wo sich das Quadrat xx aufhebt und folglich x ohne ein Wurzelzeichen bestimmt werden kann. Dann in der gefundenen Gleichung subtrahirt man beyderseits xx so wird $2px+pp=1$, woraus gefunden wird $x=\frac{1-pp}{2p}$ wo man für p eine jede Zahl annehmen kann, und auch so gar dafür Brüche gesetzt werden können.

Man setze dahero $p=\frac{m}{n}$ so wird $x=\frac{1-\frac{mm}{nn}}{\frac{2m}{n}}$; diesen Bruch multiplicire man oben und unten mit nn, so bekommt man $x=\frac{nn-mm}{2mn}$.

43.

Damit also $1+xx$ ein Quadrat werde, so kann man für m und n nach Belieben alle mögliche gantze Zahlen annehmen, und also daraus unendlich viel Werthe für x finden.

Setzt man auch überhaupt $x=\frac{nn-mm}{2mn}$, so wird

$$1+xx=1+\frac{n^4-2nnmm+m^4}{4mmnn} \quad \text{oder} \quad 1+xx=\frac{n^4+2mmnn+m^4}{4mmnn}$$

welcher Bruch würcklich ein Quadrat ist und daraus gefunden wird

$$\sqrt{(1+xx)}=\frac{nn+mm}{2mn}.$$

Hieraus können nun folgende kleinere Werthe für x bemercket werden:

wann	$n=2$	3	3	4	4	5	5	5	5
und	$m=1$	1	2	1	3	1	2	3	4
so wird	$x=\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{40}$

44.

Hieraus folget auf eine allgemeine Art, daß $1+\frac{(nn-mm)^2}{(2mn)^2}=\frac{(nn+mm)^2}{(2mn)^2}$. Nun multiplicire man diese Gleichung mit $(2mn)^2$, so wird

$$(2mn)^2+(nn-mm)^2=(nn+mm)^2;$$

wir haben also auf eine allgemeine Art zwey Quadraten, deren Summe wieder ein Quadrat ist; hierdurch wird nun diese Frage aufgelößt:

Zwey Quadrat-Zahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadrat-Zahl sey?

Also soll $pp+qq=rr$ seyn: zu diesem Ende darf man nur setzen $p=2mn$ und $q=nn-mm$ so wird $r=nn+mm$. Da hernach ferner

$$(nn+mm)^2-(2mn)^2=(nn-mm)^2,$$

so können wir auch diese Frage auflösen:

Zwey Quadrat-Zahlen zu finden, deren Differenz wieder eine Quadrat-Zahl sey? also daß $pp-qq=rr$; dann da darf man nur setzen $p=nn+mm$ und $q=2mn$, so wird $r=nn-mm$ oder man kann auch setzen $p=nn+mm$ und $q=nn-mm$, so wird alsdann $r=2mn$.

45.

Wir haben aber zweyerley Arten versprochen um die Formel $1+xx$ zu einem Quadrat zu machen; die andere Art verhält sich nun folgender Gestalt:

Man setze $\sqrt{(1+xx)}=1+\frac{mx}{n}$; daher bekommt man

$$1+xx=1+\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn};$$

subtrahirt man hier beyderseits 1, so wird $xx=\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$, welche Gleichung sich durch x theilen läßt, und folglich giebt $x = \frac{2m}{n} + \frac{mmx}{nn}$, oder mit nn multiplicirt $nnx = 2mn + mmx$, woraus gefunden wird $x = \frac{2mn}{nn - mm}$: dann setzt man diesen Werth für x, so wird

$$1 + xx = 1 + \frac{4mmnn}{n^4 - 2mmnn + m^4} \quad \text{oder} \quad = \frac{n^4 + 2mmnn + m^4}{n^4 - 2mmnn + m^4},$$

welcher Bruch das Quadrat ist von $\frac{nn + mm}{nn - mm}$. Da man nun daher diese Gleichung bekommt $1 + \frac{(2mn)^2}{(nn - mm)^2} = \frac{(nn + mm)^2}{(nn - mm)^2}$ so fließt daraus wie oben

$$(nn - mm)^2 + (2mn)^2 = (nn + mm)^2$$

welches die vorigen zwey Quadrate sind, deren Summe wieder ein Quadrat macht.

46.

Dieser Fall, welchen wir hier ausführlich abgehandelt haben, giebt uns nun zwey Methoden an die Hand um die allgemeine Formel $a + bx + cxx$ zu einem Quadrat zu machen. Die erstere gehet auf alle Fälle, wo c ein Quadrat ist; die andere aber, wo a ein Quadrat ist; welche beyde Fälle wir hier durchgehen wollen.

I.) Es sey demnach erstlich c eine Quadrat-Zahl oder die gegebene Formel sey $a + bx + ffxx$, welche ein Quadrat werden soll, zu diesem Ende setze man

$$\sqrt{(a + bx + ffxx)} = fx + \frac{m}{n} \quad \text{so wird} \quad a + bx + ffxx = ffxx + \frac{2mfx}{n} + \frac{mm}{nn},$$

wo sich die xx beyderseits aufheben, also daß $a + bx = \frac{2mfx}{n} + \frac{mm}{nn}$, welche mit nn multiplicirt, $nna + nnbx = 2mnfx + mm$ giebt; woraus gefunden wird $x = \frac{mm - nna}{nnb - 2mnf}$, wird nun dieser Werth für x geschrieben, so wird

$$\sqrt{(a + bx + ffxx)} = \frac{mmf - nnaf}{nnb - 2mnf} + \frac{m}{n} = \frac{mnb - mmf - nnaf}{nnb - 2mnf}.$$

47.

Da für x ein Bruch gefunden worden, so setze man sogleich $x = \frac{p}{q}$, also daß $p = mm - nna$, und $q = nnb - 2mnf$, und alsdann wird die Formel $a + \frac{bp}{q} + \frac{ffpp}{qq}$ ein Quadrat; folglich bleibt dieselbe ein Quadrat wann sie mit dem Quadrat qq multiplicirt wird, dahero auch diese Formel $aqq + bpq + ffpp$

ein Quadrat wird, wann man setzt $p = mm - nna$ und $q = nnb - 2mnf$, woraus unendlich viel Auflösungen in gantzen Zahlen gefunden werden können, weil man die Buchstaben m und n nach Belieben annehmen kann.

48.

II.) Der zweyte Fall findet statt, wann der Buchstabe a ein Quadrat ist. Es sey demnach diese Formel gegeben $ff + bx + cxx$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Zu diesem Ende setze man

$$\sqrt{(ff+bx+cxx)} = f + \frac{mx}{n} \quad \text{so wird} \quad ff + bx + cxx = ff + \frac{2mfx}{n} + \frac{mmxx}{nn},$$

wo sich die ff aufheben und die übrigen Glieder sich alle durch x theilen laßen, also daß $b + cx = \frac{2mf}{n} + \frac{mmx}{nn}$, oder $nnb + nncx = 2mnf + mmx$, oder $nncx - mmx = 2mnf - nnb$, und folglich $x = \frac{2mnf - nnb}{nnc - mm}$; setzt man nun diesen Werth für x, so wird

$$\sqrt{(ff+bx+cxx)} = f + \frac{2mmf - mnb}{nnc - mm} = \frac{nncf + mmf - mnb}{nnc - mm};$$

setzt man hier $x = \frac{p}{q}$, so kann wie oben folgende Formel zu einem Quadrat gemacht werden, $ffqq + bpq + cpp$, als welches geschiehet wann man setzt $p = 2mnf - nnb$ und $q = nnc - mm$.

49.

Hier ist besonders der Fall merckwürdig, wann $a = 0$; oder wann diese Formel $bx + cxx$ zu einem Quadrat gemacht werden soll; dann da darf man nur setzen $\sqrt{(bx + cxx)} = \frac{mx}{n}$ so wird $bx + cxx = \frac{mmxx}{nn}$, wo durch x dividirt und mit nn multiplicirt herauskommt, $bnn + cnnx = mmx$, folglich $x = \frac{nnb}{mm - cnn}$. Man suche zum Exempel alle dreyeckigte Zahlen welche zugleich Quadrat-Zahlen sind, so muß $\frac{xx+x}{2}$ und also auch $2xx + 2x$ ein Quadrat seyn. Dasselbe sey nun $\frac{mmxx}{nn}$, so wird $2nnx + 2nn = mmx$ und $x = \frac{2nn}{mm - 2nn}$, wo man für m und n alle mögliche Zahlen annehmen kann, alsdann aber wird mehrentheils für x ein Bruch gefunden; doch können auch gantze Zahlen herauskommen, als wann man setzt $m = 3$ und $n = 2$ so bekommt man $x = 8$, wovon das Dreyeck ist 36, welches auch ein Quadrat ist.

Man kann auch setzen $m = 7$, und $n = 5$, so wird $x = -50$ wovon das Dreyeck ist 1225, welches zugleich das Dreyeck ist von $+49$ und auch das

Quadrat von 35; dieses wäre auch heraus gekommen, wann man gesetzt hätte $n = 7$, und $m = 10$, dann da wird $x = 49$.

Eben so kann man setzen $m = 17$, und $n = 12$, da wird $x = 288$, wovon das Dreyeck ist $\frac{x(x+1)}{2} = \frac{288 \cdot 289}{2} = 144 \cdot 289$, welches eine Quadrat-Zahl ist, deren Wurzel $= 12 \cdot 17 = 204$.

50.

Bey diesem letzten Fall ist zu erwegen, daß die Formel $bx + cxx$ aus diesem Grund zum Quadrat gemacht worden, weil dieselbe einen Factor hatte, nemlich x, welches uns auf neue Fälle führet, in welchen auch die Formel $a + bx + cxx$ ein Quadrat werden kann, wann weder a noch c ein Quadrat ist.

Diese Fälle finden statt wann sich $a + bx + cxx$ in zwey Factores vertheilen läßt, welches geschiehet wann $bb - 4ac$ ein Quadrat ist. Um dieses zu zeigen so ist zu mercken, daß die Factoren immer von den Wurzeln einer Gleichung abhängen. Man setze also $a + bx + cxx = 0$, so wird $cxx = -bx - a$ und $xx = -\frac{bx}{c} - \frac{a}{c}$, woraus gefunden wird

$$x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4cc} - \frac{a}{c}\right)}, \quad \text{oder} \quad x = -\frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{(bb - 4ac)}}{2c},$$

woraus erhellet daß wann $bb - 4ac$ ein Quadrat ist, diese Wurzeln rational angegeben werden können.

Es sey demnach $bb - 4ac = dd$, so sind die Wurzeln $\frac{-b \pm d}{2c}$, oder es ist $x = \frac{-b \pm d}{2c}$, also werden von der Formel $a + bx + cxx$ die Divisores seyn $x + \frac{b-d}{2c}$ und $x + \frac{b+d}{2c}$, welche mit einander multiplicirt dieselbe Formel nur durch c dividirt hervorbringen, man findet nemlich $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{dd}{4cc}$ da nun $dd = bb - 4ac$ so hat man $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{bb}{4cc} + \frac{4ac}{4cc} = xx + \frac{bx}{c} + \frac{a}{c}$, welche mit c multiplicirt giebt $cxx + bx + a$. Man darf also nur den einen Factor mit c multipliciren, so wird unsere Formel diesem Product gleich sein:

$$\left(cx + \frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2c} + \frac{d}{2c}\right)$$

und man sieht, daß diese Auflösung immer statt findet, so oft $bb - 4ac$ ein Quadrat ist.

51.

Hieraus fließt der dritte Fall, in welchem unsere Formel $a+bx+cxx$ zu einem Quadrat gemacht werden kann; welchen wir also zu den obigen beyden hinzufügen wollen.

III.) Dieser Fall ereignet sich nun, wann unsere Formel durch ein solches Product vorgestellet werden kann $(f+gx)\cdot(h+kx)$. Um dieses zu einem Quadrat zu machen, so setze man die Wurzel davon:

$$\sqrt{(f+gx)\cdot(h+kx)} = \frac{m\cdot(f+gx)}{n}, \text{ so bekommt man}$$

$$(f+gx)\,(h+kx) = \frac{mm\cdot(f+gx)^2}{nn}$$

welche Gleichung durch $f+gx$ dividirt, giebt $h+kx = \frac{mm\cdot(f+gx)}{nn}$, das ist $hnn+knnx = fmm+gmmx$, woraus gefunden wird $x = \frac{fmm-hnn}{knn-gmm}$.

52.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Frage vorgegeben:

I. Frage: Man suche die Zahlen x, daß wann man von ihrem doppelten Quadrat 2 subtrahirt, der Rest wieder ein Quadrat sey?

Da nun seyn muß $2xx-2$ ein Quadrat, so ist zu erwegen, daß sich diese Formel durch folgende Factores vorstellen läßt $2\cdot(x+1)(x-1)$; man setze also die Wurzel davon $\frac{m\cdot(x+1)}{n}$, so wird $2\cdot(x+1)(x-1) = \frac{mm\cdot(x+1)^2}{nn}$; man dividire durch $x+1$, und multiplicire mit nn, so bekommt man $2nnx-2nn = mmx+mm$ und dahero $x = \frac{mm+2nn}{2nn-mm}$.

Nimmt man hier $m=1$ und $n=1$, so wird $x=3$, und $2xx-2=16=4^2$. Nimmt man $m=3$ und $n=2$, so wird $x=-17$: da aber nur das Quadrat von x vorkommt, so ist es gleich viel ob man nimmt $x=-17$ oder $x=+17$ aus beyden wird $2xx-2=576=24^2$.

53.

II. Frage: Es sey diese Formel gegeben $6+13x+6xx$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Hier ist nun $a=6$, $b=13$ und $c=6$, wo also weder a noch c ein Quadrat ist. Man sehe also ob $bb-4ac$ ein Quadrat werde; da nun kommt 25, so weis man daß diese Formel durch zwey Factores vorgestellt werden kann, welche sind $(2+3x)\cdot(3+2x)$; davon sey nun die

Wurzel $\frac{m(2+3x)}{n}$, so bekommt man $(2+3x)\cdot(3+2x) = \frac{mm(2+3x)^2}{nn}$, daraus wird $3nn + 2nnx = 2mm + 3mmx$ und daher wird $x = \frac{2mm-3nn}{2nn-3mm} = \frac{3nn-2mm}{3mm-2nn}$. Damit nun der Zähler positiv werde, so muß $3nn$ größer seyn als $2mm$, und also $2mm$ kleiner als $3nn$; folglich muß $\frac{mm}{nn}$ kleiner seyn als $\frac{3}{2}$, damit der Zähler positiv werde. Damit aber der Nenner positiv werde, so muß $3mm$ größer seyn als $2nn$ und also $\frac{mm}{nn}$ größer seyn als $\frac{2}{3}$. Um dahero für x positive Zahlen zu finden, so müßen für m und n solche Zahlen angenommen werden, daß $\frac{mm}{nn}$ kleiner sey als $\frac{3}{2}$ und doch größer als $\frac{2}{3}$.

Setzt man nun $m=6$ und $n=5$, so wird $\frac{mm}{nn} = \frac{36}{25}$, welches kleiner ist als $\frac{3}{2}$ und offenbahr größer als $\frac{2}{3}$; daher bekommt man $x = \frac{3}{58}$.

54.

IV.) Dieser dritte Fall leitet uns noch auf einen vierten, welcher Platz findet, wann die Formel $a + bx + cxx$ dergestalt in zwey Theile zertheilt werden kann, daß der erste ein Quadrat sey, der andere aber sich in zwey Factores auflösen laße, also daß eine solche Form herauskomme $pp + qr$, wo die Buchstaben p, q und r Formeln von dieser Art $f + gx$ bedeuten. Dann da darf man nur setzen $\sqrt{(pp+qr)} = p + \frac{mq}{n}$, so wird

$$pp + qr = pp + \frac{2mpq}{n} + \frac{mmqq}{nn},$$

wo sich die pp aufheben und die übrigen Glieder durch q theilen laßen, also daß $r = \frac{2mp}{n} + \frac{mmq}{nn}$ oder $nnr = 2mnp + mmq$, woraus sich x leicht bestimmen läßt, und dieses ist der vierte Fall, in welchem unsere Formel zu einem Quadrat gemacht werden kann, welchen wir nun durch einige Exempel erläutern wollen.

55.

III. Frage: Man suche solche Zahlen x, daß ihr Quadrat doppelt genommen um 1 größer werde als ein anderes Quadrat? oder wann man davon 1 subtrahirt ein Quadrat übrig bleibe? wie bey der Zahl 5 geschieht, deren Quadrat 25 doppelt genommen ist 50, wovon 1 subtrahirt das Quadrat 49 übrig bleibt.

Also muß $2xx - 1$ ein Quadrat seyn, wo nach unserer Formel $a = -1$, $b = 0$, und $c = 2$, und allso weder a noch c ein Quadrat ist, auch läßt sich dieselbe nicht in zwey Factores auflösen, weil $bb - 4ac = 8$ kein Quadrat ist, und dahero keiner von den drey ersten Fällen statt findet.

Nach dem vierten Fall aber kann diese Formel also vorgestellt werden $xx + (xx - 1) = xx + (x - 1)(x + 1)$. Hievon werde nun die Wurzel gesetzt $x + \frac{m(x+1)}{n}$, dahero wird $xx + (x+1)\cdot(x-1) = xx + \frac{2mx(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn}$, wo sich die xx aufheben und die übrigen Glieder durch $x + 1$ theilen laßen, da dann kommt $nnx - nn = 2mnx + mmx + mm$ und $x = \frac{mm + nn}{nn - 2mn - mm}$; und weil in unserer Formel $2xx - 1$ nur das Quadrat xx vorkommt, so ist es gleich viel ob die Werthe von x positiv oder negativ herauskommen. Man kann auch so gleich $-m$ anstatt $+m$ schreiben damit man bekomme $x = \frac{mm + nn}{nn + 2mn - mm}$.

Nimmt man hier $m = 1$ und $n = 1$, so hat man $x = 1$ und $2xx - 1 = 1$. Es sey ferner $m = 1$ und $n = 2$, so wird $x = \frac{5}{7}$ und $2xx - 1 = \frac{1}{49}$. Setzt man aber $m = 1$ und $n = -2$, so wird $x = -5$, oder $x = +5$ und $2xx - 1 = 49$.

56.

IV. Frage: Man suche solche Zahlen, deren Quadrat doppelt genommen, wann dazu 2 addirt wird, wieder ein Quadrat mache? dergleichen ist 7, wovon das Quadrat doppelt genommen ist 98, und 2 addirt, kommt das Quadrat 100.

Es muß also diese Formel $2xx + 2$ ein Quadrat seyn, wo $a = 2$, $b = 0$ und $c = 2$, also wieder weder a noch c ein Quadrat ist, auch ist $bb - 4ac$ oder -16 kein Quadrat, und kann die dritte Regel hier nicht statt finden.

Nach der vierten Regel aber läßt sich unsere Formel also vorstellen.

Man setze den ersten Theil $= 4$, so wird der andere seyn

$2xx - 2 = 2(x + 1)\cdot(x - 1)$, und daher unsere Formel $4 + 2(x + 1)\cdot(x - 1)$.

Davon sey die Wurzel $2 + \frac{m\cdot(x+1)}{n}$, woher diese Gleichung entspringt

$$4 + 2(x + 1)\cdot(x - 1) = 4 + \frac{4m(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn}$$

wo sich die 4 aufheben, die übrigen Glieder sich aber durch $x + 1$ theilen laßen, also daß $2nnx - 2nn = 4mn + mmx + mm$ und daher $x = \frac{4mn + mm + 2nn}{2nn - mm}$.

Setzt man $m = 1$ und $n = 1$ so wird $x = 7$, und $2xx + 2 = 100$. Nimmt man $m = 0$ und $n = 1$ so wird $x = 1$ und $2xx + 2 = 4$.

57.

Oefters geschiehet es auch daß wann weder die erste, noch zweyte, noch dritte Regel Platz findet, man nicht finden kan, wie zufolge der vierten Regel die Formel in zwey solche Theile zergliedert werden könne, dergleichen erfordert werden. Als wann diese Formel vorkäme $7 + 15x + 13xx$, so ist zwar eine solche Zergliederung möglich, fält aber nicht so leicht in die Augen. Dann der erste Theil ist $(1 - x)^2$ oder $1 - 2x + xx$, und daher wird der andere seyn $6 + 17x + 12xx$, welcher deswegen Factoren hat weil $17^2 - 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1$ und also ein Quadrat ist. Die zwey Factores davon sind auch würcklich $(2 + 3x) \cdot (3 + 4x)$; also daß diese Formel seyn wird $(1 - x)^2 + (2 + 3x)(3 + 4x)$, welche jetzo nach der vierten Regel aufgelöst werden kann.

Es ist aber nicht wohl zu fordern, daß jemand diese Zergliederung errathen soll; dahero wir noch einen allgemeinen Weg anzeigen wollen, um erstlich zu erkennen, ob es möglich sey eine solche Formel aufzulösen? weil es unendlich viel dergleichen giebt, deren Auflösungen schlechterdings unmöglich sind, wie z. E. bey dieser geschiehet $3xx + 2$, welche nimmermehr zu einem Quadrat gemacht werden kann.

Findet sich aber eine Formel in einem einigen Fall möglich, so ist es leicht alle Auflösungen derselben zu finden, welches wir noch allhier erörtern wollen.

58.

Der gantze Vortheil, welcher in solchen Fällen zu statten kommen kann, bestehet darin, daß man suche, ob man keinen Fall finden, oder gleichsam errathen kann, in welchem eine solche Formel $a + bx + cxx$ ein Quadrat wird? indem man für x einige kleinere Zahlen nach und nach setzt, um zu sehen ob in keinem Fall ein Quadrat herauskomme?

Um diese Arbeit zu erläutern, wann etwann eine gebrochene Zahl für x gesetzt dieses leisten sollte, kann man sogleich für x einen Bruch als $\frac{t}{u}$ schreiben, woraus diese Formel erwächst $a + \frac{bt}{u} + \frac{ctt}{uu}$, welche wann sie ein Quadrat ist, auch mit dem Quadrat uu multiplicirt ein Quadrat bleibt. Man hat also nur nöthig, zu probiren, ob man für t und u solche Werthe in gantzen Zahlen errathen kann, daß diese Formel $auu + btu + ctt$ ein Quadrat werde? dann alsdann wann man setzt $x = \frac{t}{u}$ so wird auch diese Formel $a + bx + cxx$ gewiß ein Quadrat seyn.

Kann man aber aller Mühe ungeachtet keinen solchen Fall finden, so hat man großen Grund zu vermuthen, daß es gantz und gar unmöglich sey, die Formel zu einem Quadrat zu machen, als dergleichen es unendlich viele giebt.

59.

Hat man aber einen Fall errathen, in welchem eine solche Formel ein Quadrat wird, so ist es gantz leicht alle mögliche Fälle zu finden, darinn dieselbe ebenfalls ein Quadrat wird; und die Anzahl derselben ist immer unendlich groß.

Um dieses zu zeigen, so wollen wir erstlich diese Formel betrachten $2 + 7xx$, wo $a = 2$, $b = 0$, und $c = 7$: dieselbe wird nun offenbar ein Quadrat, wann $x = 1$; dahero setze man $x = 1 + y$, so wird $xx = 1 + 2y + yy$, und unsere Formel wird seyn $9 + 14y + 7yy$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist: also setzen wir nach der zweyten Regel die Quadrat-Wurzel davon $= 3 + \frac{my}{n}$, da bekommen wir diese Gleichung

$$9 + 14y + 7yy = 9 + \frac{6my}{n} + \frac{mmyy}{nn},$$

wo sich die 9 aufheben, die übrigen Glieder aber alle durch y theilen laßen; da bekommen wir $14nn + 7nny = 6mn + mmy$ und daher $y = \frac{6mn - 14nn}{7nn - mm}$; daraus finden wir $x = \frac{6mn - 7nn - mm}{7nn - mm}$, wo man für m und n alle beliebige Zahlen annehmen kann.

Setzt man nun $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = -\frac{1}{3}$, oder auch weil nur xx vorkommt, $x = +\frac{1}{3}$, dahero wird $2 + 7xx = \frac{25}{9}$. Man setze ferner $m = 3$ und $n = 1$, so wird $x = -1$ oder $x = +1$. Setzt man aber $m = 3$ und $n = -1$, so wird $x = 17$; daraus wird $2 + 7xx = 2025$, welches das Quadrat ist von 45. Laßt uns auch setzen $m = 8$ und $n = 3$, so wird $x = -17$ wie zuvor. Setzen wir aber $m = 8$ und $n = -3$, so wird $x = 271$, daraus wird $2 + 7xx = 514089 = 717^2$.

60.

Wir wollen ferner diese Formel betrachten $5xx + 3x + 7$, welche ein Quadrat wird, wann $x = -1$. Deswegen setze man $x = y - 1$ so wird unsere Formel in diese verwandelt

$$\begin{array}{r} 5yy - 10y + 5 \\ + \ 3y - 3 \\ + 7 \\ \hline 5yy - \ 7y + 9 \end{array}$$

davon setze man die Quadrat-Wurzel $= 3 - \frac{my}{n}$, so wird

$$5yy - 7y + 9 = 9 - \frac{6my}{n} + \frac{mmyy}{nn};$$

daher wir bekommen $5nny - 7nn = -6mn + mmy$, und

$$y = \frac{7nn - 6mn}{5nn - mm}, \text{ folglich } x = \frac{2nn - 6mn + mm}{5nn - mm}.$$

Es sey $m = 2$ und $n = 1$, so wird $x = -6$ und also

$$5xx + 3x + 7 = 169 = 13^2.$$

Setzt man aber $m = -2$ und $n = 1$, so wird $x = 18$ und

$$5xx + 3x + 7 = 1681 = 41^2.$$

61.

Laßt uns nun auch diese Formel betrachten $7xx + 15x + 13$, und so gleich setzen $x = \frac{t}{u}$, also daß diese Formel $7tt + 15tu + 13uu$ ein Quadrat seyn soll. Nun probire man für t und u einige kleinere Zahlen wie folget:

Es sey	$t = 1$	und	$u = 1$,	so wird unsere Formel	=	35
„ „	$t = 2$	„	$u = 1$,	„ „ „ „	=	71
„ „	$t = 2$	„	$u = -1$,	„ „ „ „	=	11
„ „	$t = 3$	„	$u = 1$,	„ „ „ „	=	121

Da nun 121 ein Quadrat ist, und also der Werth $x = 3$ ein Genüge leistet, so setze man $x = y + 3$ und so wird unsere Formel

$$7yy + 42y + 63 + 15y + 45 + 13$$

oder $7yy + 57y + 121$; davon setze man die Wurzel $= 11 + \frac{my}{n}$, so bekommt man $7yy + 57y + 121 = 121 + \frac{22my}{n} + \frac{mmyy}{nn}$, oder $7nny + 57nn = 22mn + mmy$, und daher $y = \frac{57nn - 22mn}{mm - 7nn}$ und $x = \frac{36nn - 22mn + 3mm}{mm - 7nn}$.

Man setze z. E. $m=3$ und $n=1$, so wird $x=-\frac{3}{2}$ und unsere Formel $7xx+15x+13=\frac{25}{4}=\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Es sey ferner $m=1$ und $n=1$, so wird $x=-\frac{17}{6}$. Nimmt man $m=3$ und $n=-1$, so wird $x=\frac{129}{2}$ und unsere Formel

$$7xx+15x+13=\frac{120409}{4}=\left(\frac{347}{2}\right)^2.$$

62.

Bisweilen aber ist alle Mühe umsonst einen Fall zu errathen, in welchem die vorgegebene Formel ein Quadrat wird, wie z. E. bey dieser geschiehet $3xx+2$, oder wann man für x schreibt $\frac{t}{u}$, dieser $3tt+2uu$, welche man mag auch für t und u Zahlen annehmen die man will, niemahls ein Quadrat wird. Dergleichen Formeln, welche auf keinerley Weise zu einem Quadrat gemacht werden können, giebt es unendlich viel, und deswegen wird es der Mühe werth seyn einige Kennzeichen anzugeben, woraus die Unmöglichkeit erkennt werden kann, damit man öfters der Mühe überhoben seyn möge, durch Rathen solche Fälle zu finden wo ein Quadrat herauskommt, wozu das folgende Capitel bestimmt ist.

CAPITEL 5

VON DEN FÄLLEN DA DIE FORMEL $a+bx+cxx$ NIEMAHLS EIN QUADRAT WERDEN KANN

63.

Da unsere allgemeine Formel aus drey Gliedern besteht, so ist zu bemercken, daß dieselbe immer in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das mittlere Glied mangelt. Dieses geschiehet wann man setzt $x=\frac{y-b}{2c}$, dadurch bekommt unsere Formel diese Gestalt

$$a+\frac{by-bb}{2c}+\frac{yy-2by+bb}{4c}, \quad \text{oder} \quad \frac{4ac-bb+yy}{4c}.$$

Soll diese ein Quadrat werden, so setze man dasselbe $=\frac{zz}{4}$, so wird

$$4ac-bb+yy=czz \quad \text{folglich} \quad yy=czz+bb-4ac.$$

Wann also unsere Formel ein Quadrat seyn soll, so wird auch diese

$$czz+bb-4ac$$