CAPITEL 3

VON DEN ZUSAMMENGESETZTEN UNBESTIMMTEN GLEICHUNGEN WO VON DER EINEN UNBEKANTEN ZAHL NUR DIE ERSTE POTESTÄT VORKOMMT

31.

Wir kommen nun zu solchen unbestimmten Gleichungen, wo zwey unbekante Zahlen gesucht werden, und die eine nicht wie bisher allein steht, sondern entweder mit der andere multiplicirt oder in einer höheren Potestät vorkommt, wann nur von der andern blos die erste Potestät vorhanden ist. Auf eine allgemeine Art haben solche Gleichungen folgende Form:

$$a + bx + cy + dxx + exy + fx^3 + gxxy + hx^4 + kx^3y + \text{etc.} = 0$$

in welcher nur y vorkommt, und also aus dieser Gleichung leicht bestimmt werden kann, die Bestimmung muß aber also geschehen, daß für x und y gantze Zahlen herauskommen. Dergleichen Fälle wollen wir nun betrachten und von den leichtern den Anfang machen.

32.

I. Frage: Man suche zwey Zahlen, wann ihre Summe zu ihrem Product addirt wird, daß 79 herauskommen?

Es seyen die zwey verlangten Zahlen x und y, so muß seyn $xy + x + y = 79$, woraus wir bekommen $xy + y = 79 - x$ und $y = \frac{79 - x}{x + 1} = -1 + \frac{80}{x + 1}$, woraus erhellet daß $x + 1$ ein Theiler seyn muß von 80; da nun 80 viele Theiler hat so findet man aus einem jeden einen Werth für x; wie aus folgenden zu sehen:

die Theiler sind		1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
daher wird	$x =$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
und	$y =$	79	39	19	15	9	7	4	3	1	0

weil nun hier die letztern Auflösungen mit den erstern übereinkommen, so hat man in allem folgende fünf Auflösungen:

I	II	III	IV	V
0	1	3	4	7
79	39	19	15	9

33.

Solcher Gestalt kann auch diese allgemeine Gleichung aufgelößt werden

$$xy + ax + by = c$$

woraus kommt $xy + by = c - ax$ und also $y = \frac{c - ax}{x + b}$ oder $y = -a + \frac{ab + c}{x + b}$; dahero muß $x + b$ ein Theiler seyn der bekanten Zahl $ab + c$ und also kann aus einem jeden Theiler derselben ein Werth für x gefunden werden. Man setze dahero es sey $ab + c = fg$ also daß

$$y = -a + \frac{fg}{x + b}.$$

Nun nehme man $x + b = f$ oder $x = f - b$, so wird $y = -a + g$ oder $y = g - a$; derohalben auf so viel verschiedene Arten sich die Zahl $ab + c$ durch zwey Factores, als fg, vorstellen läßt, so erhält man daher nicht nur eine, sondern zwey Auflösungen: die erste ist nemlich

$$x = f - b \quad \text{und} \quad y = g - a,$$

die andere aber kommt gleicher Gestalt heraus, wann man $x + b = g$ setzt, da wird

$$x = g - b \quad \text{und} \quad y = f - a.$$

Sollte dahero diese Gleichung vorgegeben seyn $xy + 2x + 3y = 42$ so wäre $a = 2$, $b = 3$ und $c = 42$ folglich $y = -2 + \frac{48}{x + 3}$. Nun kann die Zahl 48 auf vielerley Art durch 2 Factores als fg vorgestellt werden, da dann immer seyn wird $x = f - 3$ und $y = g - 2$, oder auch $x = g - 3$ und $y = f - 2$. Dergleichen Factores sind nun folgende:

	I.		II.		III.		IV.		V.	
Factores	$1 \cdot 48$		$2 \cdot 24$		$3 \cdot 16$		$4 \cdot 12$		$6 \cdot 8$	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
Zahlen	-2	46	-1	22	0	14	1	10	3	6
oder	45	-1	21	0	13	1	9	2	5	4

34.

Noch allgemeiner kann die Gleichung also vorgestellet werden:

$$mxy = ax + by + c,$$

wo a, b, c und m gegebene Zahlen sind, für x und y aber gantze Zahlen verlangt werden.

Man suche daher y so bekommt man $y = \frac{ax+c}{mx-b}$; damit hier x aus dem Zähler weg gebracht werden könne, so multiplicirt man beyderseits mit m, so hat man $my = \frac{max+mc}{mx-b} = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$. Der Zähler dieses Bruchs ist nun eine bekante Zahl, wovon der Nenner ein Theiler seyn muß, man stelle dahero den Zähler durch zwey Factores als fg vor, welches öfters auf vielerley Art geschehen kann, und sehe ob sich einer davon mit $mx - b$ vergleichen laße, also daß $mx - b = f$; hierzu wird aber erfordert, weil $x = \frac{f+b}{m}$, daß $f + b$ sich durch m theilen laße, daher hier nur solche Factores von $mc + ab$ gebraucht werden können, welche, wann dazu b addirt wird, sich durch m theilen laßen, welches durch ein Exempel erläutert werden soll:

Es sey demnach $5xy = 2x + 3y + 18$. Hieraus bekommt man $y = \frac{2x+18}{5x-3}$ und $5y = \frac{10x+90}{5x-3} = 2 + \frac{96}{5x-3}$, hier müßen nun von 96 solche Theiler gesucht werden, daß wann zu denselben 3 addirt wird, die Summ durch 5 theilbar werde. Man nehme daher alle Theiler von 96 welche sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, woraus erhellet daß nur diese, nemlich 2, 12, 32 gebraucht werden können.

Es sey demnach

I.) $5x - 3 = 2$, so wird $5y = 50$ und daher $x = 1$, und $y = 10$

II.) $5x - 3 = 12$, so wird $5y = 10$ und dahero $x = 3$, und $y = 2$

III.) $5x - 3 = 32$, so wird $5y = 5$ und dahero $x = 7$, und $y = 1$.

35.

Da hier in der allgemeinen Auflösung wird $my - a = \frac{mc+ab}{mx-b}$, so ist dienlich diese Anmerckung zu machen, daß wann eine in dieser Form $mc + ab$ enthaltene Zahl einen Theiler hat, der in dieser Form $mx - b$ enthalten ist, alsdann der Quotient nothwendig diese Form $my - a$ haben müße, und daß alsdann die Zahl $mc + ab$ durch ein solches Product $(mx - b)(my - a)$ vorgestellt werden könne: Es sey z. E. $m = 12$, $a = 5$, $b = 7$ und $c = 15$; so bekommt man $12y - 5 = \frac{215}{12x-7}$; nun sind von 215 die Theiler 1, 5, 43, 215, unter welchen die gesucht werden müßen, welche in der Form $12x - 7$ enthalten sind, oder wann man 7 darzu addirt, daß sich die Summe durch 12 theilen laße, von welchen nur 5 dieses leistet, also $12x - 7 = 5$ und $12y - 5 = 43$. Wie nun aus der ersten wird $x = 1$ so findet man auch aus der andern y in gantzen Zahlen, nemlich $y = 4$. Diese Eigenschaft ist in Betrachtung der Natur der Zahlen von der größten Wichtigkeit, und verdienet deswegen wohl bemercket zu werden.

36.

Wir wollen nun auch eine Gleichung von dieser Art betrachten

$$xy + xx = 2x + 3y + 29.$$

Hieraus findet man nun

$$y = \frac{2x - xx + 29}{x - 3} \quad \text{oder} \quad y = -x - 1 + \frac{26}{x - 3};$$

also muß $x - 3$ ein Theiler seyn von der Zahl 26, und alsdann wird der Quotient $= y + x + 1$. Da nun die Theiler von 26 sind 1, 2, 13, 26 so erhalten wir diese Auflösungen:

I.) $x - 3 = 1$ oder $x = 4$, so wird $y + x + 1 = y + 5 = 26$; und $y = 21$

II.) $x - 3 = 2$ oder $x = 5$, allso $y + x + 1 = y + 6 = 13$; und $y = 7$

III.) $x - 3 = 13$ oder $x = 16$, so wird $y + x + 1 = y + 17 = 2$; und $y = -15$

welcher negative Werth wegzulaßen ist, und deswegen auch der letzte Fall $x - 3 = 26$ nicht gerechnet werden muß.

37.

Mehr Formeln von dieser Art wo nur die erste Potestät von y, noch höhere aber von x vorkommen, sind nicht nöthig allhier zu berechnen, weil dergleichen Fälle sich nur selten ereignen, und alsdann auch nach der hier erklärten Art aufgelöset werden können. Wann aber auch y zur zweyten oder einer noch höhern Potestät ansteiget, und man den Werth davon nach den gegebenen Regeln bestimmen will, so kommt man auf Wurzelzeichen, hinter welchen x in der zweyten oder einer noch höhern Potestät befindlich ist, und alsdann kommt es darauf an solche Werthe für x ausfindig zu machen, daß die Irrationalität, oder die Wurzelzeichen wegfallen.

Und eben hierin bestehet die größte Kunst der unbestimmten Analytic, wie dergleichen Irrational-Formeln zur Rationalität gebracht werden sollen, wozu wir die Anleitung in den folgenden Capiteln geben wollen.