CAPITEL 14

AUFLÖSUNG EINIGER FRAGEN DIE ZU DIESEM THEIL DER ANALYTIC GEHÖREN

212.

Wir haben bisher die Kunstgriffe erklärt, welche in diesem Theil der Analytic vorkommen und nöthig sind, um alle diejenigen Aufgaben, so hieher gehören aufzulösen, dahero wir um dieses in ein größeres Licht zu setzen einige dergleichen Fragen hier vorlegen und die Auflösung derselben beyfügen wollen.

213.

I. Frage: Man suche eine Zahl, daß wann man darzu 1 so wohl addirt oder auch davon subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme?

Setzt man die gesuchte Zahl $=x$, so muß so wohl $x+1$ als auch $x-1$ ein Quadrat seyn. Für das erstere setze man $x+1=pp$, so wird $x=pp-1$ und $x-1=pp-2$, welches auch ein Quadrat seyn muß. Man setze, die Wurzel davon sey $p-q$, so wird $pp-2=pp-2pq+qq$, wo sich die pp aufheben und daraus gefunden wird $p=\frac{qq+2}{2q}$; daraus man ferner erhält $x=\frac{q^4+4}{4qq}$; wo man q nach Belieben und auch in Brüchen annehmen kann.

Man setze dahero $q=\frac{r}{s}$, so erhalten wir $x=\frac{r^4+4s^4}{4rrss}$, wovon wir etliche kleinere Werthe anzeigen wollen:

wann $r=1$	2	1	3
und $s=1$	1	2	1
so wird $x=\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{85}{36}$

214.

II. Frage: Man suche eine Zahl x, daß wann man dazu 2 beliebige Zahlen als z. E. 4 und 7 addirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme?

Es müßen also diese zwey Formeln $x+4$ und $x+7$ Quadrate werden; man setze dahero für die erstere $x+4=pp$, so wird $x=pp-4$, die andere Formel aber wird $x+7=pp+3$, welche auch ein Quadrat seyn muß. Man setze daher die Wurzel davon $=p+q$, so wird $pp+3=pp+2pq+qq$, woraus gefunden wird $p = \frac{3-qq}{2q}$, folglich $x = \frac{9-22qq+q^4}{4qq}$. Setzen wir für q einen Bruch als $\frac{r}{s}$, so bekommen wir $x = \frac{9s^4-22rrss+r^4}{4rrss}$, wo man für r und s alle beliebige gantze Zahlen annehmen kann.

Nimmt man $r=1$ und $s=1$, so wird $x=-3$, und daraus wird $x+4=1$ und $x+7=4$. Will man aber eine positive Zahl für x haben, so setze man $s=2$ und $r=1$, da bekommt man $x=\frac{57}{16}$; woraus wird $x+4=\frac{121}{16}$ und $x+7=\frac{169}{16}$; will man ferner setzen $s=3$ und $r=1$, so bekommt man $x=\frac{133}{9}$, woraus $x+4=\frac{169}{9}$ und $x+7=\frac{196}{9}$. Soll das letzte Glied das mittlere überwiegen, so setze man $r=5$ und $s=1$, da wird $x=\frac{21}{25}$, und daraus $x+4=\frac{121}{25}$ und $x+7=\frac{196}{25}$.

215.

III. Frage: Man suche einen solchen Bruch x, daß wann man denselben entweder zu 1 addirt oder von 1 subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat heraus komme?

Da diese beyden Formeln $1+x$ und $1-x$ Quadrate seyn sollen, so setze man für die erstere $1+x=pp$, da wird $x=pp-1$ und die andere Formel $1-x=2-pp$, welche ein Quadrat seyn soll. Da nun weder das erste noch letzte Glied ein Quadrat ist, so muß man sehen, ob man einen Fall errathen kann, da solches geschieht; ein solcher fällt aber gleich in die Augen, nemlich $p=1$, deswegen setze man $p=1-q$, also daß $x=qq-2q$, so wird unsere Formel $2-pp=1+2q-qq$, davon setze man die Wurzel $=1-qr$, so bekommt man $1+2q-qq=1-2qr+qqrr$; hieraus $2-q=-2r+qrr$ und $q=\frac{2r+2}{rr+1}$; hieraus wird $x=\frac{4r-4r^3}{(rr+1)^2}$, weil r ein Bruch ist, so setze man $r=\frac{t}{u}$, so wird $x=\frac{4tu^3-4t^3u}{(tt+uu)^2}=\frac{4tu(uu-tt)}{(tt+uu)^2}$; also muß u größer seyn als t.

Man setze demnach $u=2$ und $t=1$, so wird $x=\frac{24}{25}$; setzt man $u=3$ und $t=2$, so wird $x=\frac{120}{169}$, und daraus $1+x=\frac{289}{169}$ und $1-x=\frac{49}{169}$, welche beyde Quadrate sind.

216.

IV. Frage: Man suche solche Zahlen x, welche so wohl zu 10 addirt als von 10 subtrahirt Quadrate hervorbringen?

Es müßen also diese Formeln $10+x$ und $10-x$ Quadrate seyn, welches nach der vorigen Weise geschehen könnte. Um aber einen andern Weg zu zeigen, so bedencke man, daß auch das Product dieser Formeln ein Quadrat seyn müße, nemlich $100 - xx$. Da nun hier das erste Glied schon ein Quadrat ist, so setze man die Wurzel $= 10 - px$, so wird $100 - xx = 100 - 20px + ppxx$ und allso $x = \frac{20p}{pp+1}$; hieraus aber folgt, daß nur das Product ein Quadrat werde, nicht aber eine jede besonders. Wann aber nur die eine ein Quadrat wird, so muß die andere nothwendig auch eines seyn; nun aber wird die erste

$$10 + x = \frac{10pp + 20p + 10}{pp + 1} = \frac{10(pp + 2p + 1)}{pp + 1};$$

und weil $pp + 2p + 1$ schon ein Quadrat ist, so muß noch dieser Bruch $\frac{10}{pp+1}$ ein Quadrat seyn, folglich auch dieser $\frac{10pp+10}{(pp+1)^2}$. Es ist also nur nöthig, daß die Zahl $10pp + 10$ ein Quadrat werde, wo wiederum ein Fall, da es geschieht, errathen werden muß. Dieser ist wann $p = 3$ und deswegen setze man $p = 3 + q$, so bekommt man $100 + 60q + 10qq$; davon setze man die Wurzel $10 + qt$, so wird $100 + 60q + 10qq = 100 + 20qt + qqtt$, daraus $q = \frac{60 - 20t}{tt - 10}$, daraus $p = 3 + q$ und $x = \frac{20p}{pp+1}$.

Setzt man $t = 3$, so wird $q = 0$ und $p = 3$ folglich $x = 6$, dahero wird $10 + x = 16$ und $10 - x = 4$. Es sey aber $t = 1$, so wird $q = -\frac{40}{9}$ und $p = -\frac{13}{9}$ und $x = -\frac{234}{25}$; es ist aber gleich viel zu setzen $x = +\frac{234}{25}$, und dann wird $10 + x = \frac{484}{25}$ und $10 - x = \frac{16}{25}$, welche beyde Quadrate sind.

217.

Anmerckung: Wollte man diese Frage allgemein machen und für eine jegliche gegebene Zahl a solche Zahlen x verlangen, also daß so wohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werden sollte, so würde die Auflösung öfters unmöglich werden, nemlich in allen Fällen, wo die Zahl a keine Summe von zwey Quadraten ist. Aber wir haben schon oben [§ 168] gesehen, daß von 1 bis 50 nur die folgenden Zahlen Summen von zwey Quadraten, oder in dieser Form $xx + yy$ enthalten sind:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

die übrigen also, welche gleichfals bis 50 sind:

3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48,

nicht können in zwey Quadrate zerlegt werden; so oft also a eine von diesen letztern Zahlen wäre, so offt würde auch die Frage unmöglich seyn.

Um dieses zu zeigen, so laßt uns setzen $a + x = pp$ und $a - x = qq$, und da giebt die Addition $2a = pp + qq$; also daß $2a$ eine Summe von zwey Quadraten seyn muß, ist aber $2a$ eine solche Summe, so muß auch a eine solche seyn, wann dahero a keine Summe von zwey Quadraten ist, so ist es auch nicht möglich, daß $a + x$ und $a - x$ zugleich Quadrate seyn können.

218.

Wann demnach $a = 3$ wäre, so würde die Frage unmöglich seyn, und das deswegen, weil 3 keine Summe von zwey Quadraten ist; man könnte zwar einwenden, daß es vielleicht zwey Quadrate in Brüchen gebe, deren Summe 3 ausmacht; allein dieses ist auch nicht möglich, dann wäre $3 = \frac{pp}{qq} + \frac{rr}{ss}$ und man multiplicirte mit $qqss$, so würde $3qqss = ppss + qqrr$, wo $ppss + qqrr$ eine Summe von zwey Quadraten ist, welche sich durch 3 theilen ließe; wir haben aber oben gesehen, daß eine Summe von zwey Quadraten keine anderen Theiler haben könne, als welche selbst solche Summen sind.

Es laßen sich zwar die Zahlen 9 und 45 durch 3 theilen, allein dieselben sind auch durch 9 theilbar und so gar ein jedes der beyden Quadrate, woraus sie bestehen, weil nemlich $9 = 3^2 + 0^2$, und $45 = 6^2 + 3^2$, welches hier nicht statt findet: daher dieser Schluß seine Richtigkeit hat, daß wann eine Zahl a in ganzen Zahlen keine Summe von zwey Quadraten ist, solches auch nicht in Brüchen geschehen könne; ist aber die Zahl a in gantzen Zahlen eine Summe von zwey Quadraten, so kann dieselbe auch in Brüchen auf unendlich vielerley Art eine Summe von zwey Quadraten seyn, welches wir zeigen wollen.

219.

V. Frage: Eine Zahl, die eine Summe von zwey Quadraten ist, auf unendlich vielerley Art in eine Summe von zwey andern Quadraten zu zerlegen?

Die vorgegebene Zahl sey demnach $ff + gg$ und man soll zwey andere Quadraten, als xx und yy suchen, deren Summe $xx + yy$ gleich sey der Zahl $ff + gg$, also daß $xx + yy = ff + gg$. Hier ist nun so gleich klar, daß wann x größer oder kleiner ist als f, y umgekehrt kleiner oder größer seyn müße als g. Man setze dahero $x = f + pz$ und $y = g - qz$, so wird

$$ff + 2fpz + ppzz + gg - 2gqz + qqzz = ff + gg,$$

wo sich die ff und gg aufheben, die übrigen Glieder aber durch z theilen laßen. Dahero wird $2fp + ppz - 2gq + qqz = 0$ oder $ppz + qqz = 2gq - 2fp$, und also $z = \frac{2gq - 2fp}{pp + qq}$, woraus für x und y folgende Werthe gefunden werden

$$x = \frac{2gpq + f(qq - pp)}{pp + qq} \quad \text{und} \quad y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq},$$

wo man für p und q alle mögliche Zahlen nach Belieben annehmen kann.

Es sey die gegebene Zahl 2, also daß $f = 1$ und $g = 1$ so wird

$$xx + yy = 2, \quad \text{wann} \quad x = \frac{2pq + qq - pp}{pp + qq} \quad \text{und} \quad y = \frac{2pq + pp - qq}{pp + qq};$$

setzt man $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = \frac{1}{5}$ und $y = \frac{7}{5}$.

220.

VI. Frage: Wann die Zahl a eine Summe von zwey Quadraten ist, solche Zahlen x zu finden, daß so wohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werde?

Es sey die Zahl $a = 13 = 9 + 4$, und man setze

$$13 + x = pp \quad \text{und} \quad 13 - x = qq,$$

so giebt erstlich die Addition $26 = pp + qq$, die Subtraction aber $2x = pp - qq$: also müßen p und q so beschaffen seyn, daß $pp + qq$ der Zahl 26 gleich werde, welche auch eine Summe von zwey Quadraten ist, nemlich $25 + 1$, folglich muß diese Zahl 26 in zwey Quadrate zerlegt werden, wovon das größere für pp, das kleinere aber für qq genommen wird. Hieraus bekömmt man erstlich $p = 5$ und $q = 1$ und daraus wird $x = 12$; hernach aber kann aus dem obigen die Zahl 26 noch auf unendlich vielerley Art in zwey Quadrate aufgelößt werden. Dann weil $f = 5$ und $g = 1$, wann wir in den obigen Formeln anstatt der Buchstaben p und q schreiben t und u, vor x und y aber die Buchstaben p und q, so finden wir

$$p = \frac{2tu + 5(uu - tt)}{tt + uu} \quad \text{und} \quad q = \frac{10tu + tt - uu}{tt + uu}.$$

Nimmt man nun für t und u Zahlen nach Belieben an und bestimmt daraus die Buchstaben p und q, so erhält man die gesuchte Zahl $x = \frac{pp - qq}{2}$.

Es sey z. E. $t = 2$ und $u = 1$, so wird $p = -\frac{11}{5}$ und $q = \frac{23}{5}$; und daher $pp - qq = -\frac{408}{25}$ und $x = \frac{204}{25}$.

221.

Um aber diese Frage allgemein aufzulösen, so sey die gegebene Zahl $a = cc + dd$, die gesuchte aber $= z$, also daß diese Formeln $a + z$ und $a - z$ Quadrate werden sollten.

Nun setze man

$$a + z = xx \quad \text{und} \quad a - z = yy,$$

so wird erstlich $2a = 2(cc + dd) = xx + yy$, und hernach $2z = xx - yy$. Es müßen also die Quadrate xx und yy so beschaffen seyn, daß $xx + yy = 2(cc + dd)$, wo $2(cc + dd)$ auch eine Summe von zwey Quadraten ist, nemlich $(c + d)^2 + (c - d)^2$. Man setze Kürtze halber $c + d = f$ und $c - d = g$: also daß seyn muß $xx + yy = ff + gg$, dieses geschieht aber aus dem obigen, wann man nimmt

$$x = \frac{2gpq + f(qq - pp)}{pp + qq} \quad \text{und} \quad y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq}.$$

Hieraus bekommt man die leichteste Auflösung, wann man nimmt $p = 1$ und $q = 1$, dann daraus wird $x = \frac{2g}{2} = g = c - d$ und $y = f = c + d$, und hieraus folglich $z = 2cd$. Hieraus wird nun offenbar

$$cc + dd + 2cd = (c + d)^2 \quad \text{und} \quad cc + dd - 2cd = (c - d)^2.$$

Um eine andere Auflösung zu finden, so sey $p = 2$ und $q = 1$, da wird $x = \frac{c - 7d}{5}$ und $y = \frac{7c + d}{5}$, wo so wohl c und d, als x und y negativ genommen werden können, weil nur ihre Quadrate vorkommen. Da nun x größer seyn soll als y, so nehme man d negativ und da wird $x = \frac{c + 7d}{5}$ und $y = \frac{7c - d}{5}$. Hieraus folgt $z = \frac{24dd + 14cd - 24cc}{25}$, welcher Werth zu $a = cc + dd$ addirt, giebt $\frac{cc + 14cd + 49dd}{25}$, wovon die Quadrat-Wurzel ist $\frac{c + 7d}{5}$. Subtrahirt man aber z von a so bleibt $\frac{49cc - 14cd + dd}{25}$, wovon die Quadrat-Wurzel ist $\frac{7c - d}{5}$; jene ist nemlich x, diese aber y.

222.

VII. Frage: Man suche eine Zahl x, daß wann so wohl zu derselben selbst als zu ihrem Quadrat xx, eins addirt wird, in beyden Fällen ein Quadrat heraus komme?

Es müßen also diese beyde Formeln $x + 1$ und $xx + 1$ zu Quadraten gemacht werden. Man setze dahero für die erste $x + 1 = pp$, so wird

$x = pp - 1$, und die zweyte Formel $xx + 1 = p^4 - 2pp + 2$, welche Formel ein Quadrat seyn soll: dieselbe aber ist von der Art, daß keine Auflösung zu finden, wofern nicht schon ein Fall bekant ist; ein solcher Fall aber fält so gleich in die Augen, nemlich wo $p = 1$. Man setze dahero $p = 1 + q$, so wird

$$xx + 1 = 1 + 4qq + 4q^3 + q^4,$$

welches auf vielerley Art zu einem Quadrat gemacht werden kann.

I. Man setze erstlich die Wurzel davon $1 + qq$, so wird

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 2qq + q^4,$$

daraus wird $4q + 4qq = 2q$ oder $4 + 4q = 2$ und $q = -\frac{1}{2}$, folglich $p = \frac{1}{2}$ und $x = -\frac{3}{4}$.

II. Setzt man die Wurzel $1 - qq$, so wird

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 - 2qq + q^4,$$

und daher $q = -\frac{3}{2}$ und $p = -\frac{1}{2}$, hieraus $x = -\frac{3}{4}$ wie vorher.

III. Setzt man die Wurzel $1 + 2q + qq$, damit sich die ersten und die zwey letzten Glieder aufheben, so wird

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 4q + 6qq + 4q^3 + q^4,$$

daraus wird $q = -2$ und $p = -1$, daher $x = 0$.

IV. Man kann aber auch die Wurzel setzen $1 - 2q - qq$, so wird

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 - 4q + 2qq + 4q^3 + q^4,$$

daraus wird $q = -2$ wie vorher.

V. Damit die zwey ersten Glieder einander aufheben, so sey die Wurzel $1 + 2qq$, da wird

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 4qq + 4q^4,$$

und daraus $q = \frac{4}{3}$ und $p = \frac{7}{3}$; folglich $x = \frac{40}{9}$; woraus folgt

$$x + 1 = \frac{49}{9} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 \quad \text{und} \quad xx + 1 = \frac{1681}{81} = \left(\frac{41}{9}\right)^2.$$

Wollte man noch mehr Werthe für q finden, so müßte man einen von diesen hier gefundenen z. E. $-\frac{1}{2}$ nehmen, und ferner setzen $q = -\frac{1}{2} + r$; .

daraus aber würde

$$p = \frac{1}{2} + r;\ pp = \frac{1}{4} + r + rr \quad \text{und} \quad p^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}r + \frac{3}{2}rr + 2r^3 + r^4,$$

folglich unsere Formel $\frac{25}{16} - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}rr + 2r^3 + r^4$, welche ein Quadrat seyn soll, und dahero auch mit 16 multiplicirt, nemlich

$$25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4.$$

Davon setze man nun:

I. Die Wurzel $= 5 + fr \pm 4rr$, also daß

$$25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr \pm 40rr + ffrr \pm 8fr^3 + 16r^4.$$

Da nun die ersten und letzten Glieder wegfallen, so bestimme man f so, daß auch die zweyten wegfallen, welches geschieht wann $-24 = 10f$ und also $f = -\frac{12}{5}$, alsdann geben die übrigen Glieder durch rr dividirt

$$-8 + 32r = \pm 40 + ff \pm 8fr.$$

Für das obere Zeichen hat man $-8 + 32r = 40 + ff + 8fr$, und daraus $r = \frac{48+ff}{32-8f}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = \frac{21}{20}$, folglich $p = \frac{31}{20}$ und $x = \frac{561}{400}$, daraus wird $x + 1 = \left(\frac{31}{20}\right)^2$ und $xx + 1 = \left(\frac{689}{400}\right)^2$.

II. Gilt aber das untere Zeichen, so wird $-8 + 32r = -40 + ff - 8fr$, und daraus $r = \frac{ff-32}{32+8f}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = -\frac{41}{20}$, folglich $p = -\frac{31}{20}$, woraus die vorige Gleichung entspringt.

III. Es sey die Wurzel $4rr + 4r \pm 5$, also daß

$$16r^4 + 32r^3 - 8rr - 24r + 25 = 16r^4 + 32r^3 \pm 40rr + 16rr \pm 40r + 25,$$

wo die zwey ersten und die gantz letzten Glieder wegfallen, die übrigen aber durch r dividirt geben $-8r - 24 = \pm 40r + 16r \pm 40$, oder

$$-24r - 24 = \pm 40r \pm 40.$$

Wann das obere Zeichen gilt, so wird $-24r - 24 = 40r + 40$, oder $0 = 64r + 64$, oder $0 = r + 1$, das ist $r = -1$ und $p = -\frac{1}{2}$, welchen Fall wir schon gehabt haben; und eben derselbe folgt auch aus dem untern Zeichen.

IV. Man setze die Wurzel $5+fr+grr$ und bestimme f und g also, daß die drey ersten Glieder wegfallen. Da nun

$25-24r-8rr+32r^3+16r^4=25+10fr+10grr+ffrr+2fgr^3+ggr^4,$

so wird erstlich $-24=10f$ und also $f=-\frac{12}{5}$, ferner $-8=10g+ff$, und also $g=\frac{-8-ff}{10}$, oder $g=-\frac{344}{250}=-\frac{172}{125}$; die beyden letzten Glieder aber durch r^3 dividirt geben $32+16r=2fg+ggr$ und daraus $r=\frac{2fg-32}{16-gg}$. Hier wird der Zehler

$2fg-32=\frac{+24\cdot 172-32\cdot 625}{5\cdot 125}=\frac{-32\cdot 496}{625}$, oder dieser Zehler $=\frac{-16\cdot 32\cdot 31}{625}$;

der Nenner aber giebt

$$16-gg=(4-g)(4+g)=\frac{328\cdot 672}{125\cdot 125},\quad \text{oder}\quad 16-gg=\frac{8\cdot 32\cdot 41\cdot 21}{25\cdot 625};$$

daraus wird $r=-\frac{1550}{861}$, hieraus $p=-\frac{2239}{1722}$, und hieraus wird ein neuer Werth für x, nemlich $x=pp-1$, gefunden.

223.

VIII. Frage: Zu drey gegebenen Zahlen a, b und c eine solche Zahl x zu finden, welche zu einer jeden derselben addirt ein Quadrat hervorbringe?

Es müßen also diese drey Formeln zu Quadraten gemacht werden, nemlich $x+a$, $x+b$ und $x+c$.

Man setze für die erstere $x+a=zz$, also daß $x=zz-a$, so werden die beyden andern Formeln $zz+b-a$ und $zz+c-a$, wovon eine jede ein Quadrat seyn soll. Hievon aber läßt sich keine allgemeine Auflösung geben, weil solches sehr öfters unmöglich ist, und die Möglichkeit beruhet einzig und allein auf der Beschaffenheit der beyden Zahlen $b-a$ und $c-a$. Dann wäre z. E. $b-a=1$ und $c-a=-1$, das ist $b=a+1$ und $c=a-1$, so müßten $zz+1$ und $zz-1$ Quadrate werden, und z ohne Zweifel ein Bruch seyn. Man setze dahero $z=\frac{p}{q}$, so würden diese zwey Formeln Quadrate seyn müßen, $pp+qq$ und $pp-qq$, folglich müßte auch ihr Product, nemlich p^4-q^4, ein Quadrat seyn, daß aber dieses nicht möglich sey ist oben gezeigt worden.

Wäre ferner $b-a=2$, und $c-a=-2$, das ist $b=a+2$ und $c=a-2$, so müßten, wann man wiederum setzte $z=\frac{p}{q}$, diese zwey Formeln $pp+2qq$ und $pp-2qq$ Quadrate werden, folglich auch ihr Product p^4-4q^4, welches ebenfals nicht möglich ist.

Man setze überhaupt $b - a = m$ und $c - a = n$, ferner auch $z = \frac{p}{q}$, so müßen diese Formeln Quadrate seyn $pp + mqq$ und $pp + nqq$; welches wie wir eben gesehen unmöglich ist, wann entweder $m = +1$ und $n = -1$, oder wann $m = +2$ und $n = -2$ ist.

Es ist auch ferner nicht möglich wann $m = ff$ und $n = -ff$. Dann alsdann würde das Product derselben $p^4 - f^4q^4$ eine Differenz von zwey Biquadraten seyn, welche niemahls ein Quadrat werden kann.

Eben so wann $m = 2ff$ und $n = -2ff$, so können auch diese Formeln $pp + 2ffqq$ und $pp - 2ffqq$ nicht beyde Quadrate werden, weil ihr Product $p^4 - 4f^4q^4$ auch ein Quadrat seyn müßte; folglich wann man setzt $fq = r$, diese Formel $p^4 - 4r^4$, wovon die Unmöglichkeit auch oben gezeigt worden.

Wäre ferner $m = 1$ und $n = 2$, also daß diese Formeln $pp + qq$ und $pp + 2qq$ Quadrate seyn müßten, so setze man $pp + qq = rr$ und $pp + 2qq = ss$; da wird aus der ersteren $pp = rr - qq$, und also die andere $rr + qq = ss$; daher müßte so wohl $rr - qq$ als $rr + qq$ ein Quadrat seyn; und auch ihr Product $r^4 - q^4$ müßte ein Quadrat seyn, welches unmöglich ist.

Hieraus sieht man nun zur Gnüge, daß es nicht leicht ist solche Zahlen für m und n zu wählen, daß die Auflösung möglich werde. Das einige Mittel solche Werthe für m und n zu finden ist, daß man dergleichen Fälle errathe, oder solcher Gestalt ausfündig mache.

Man setzt $ff + mgg = hh$ und $ff + ngg = kk$, so bekommt man aus der erstern $m = \frac{hh - ff}{gg}$, und aus der andern $n = \frac{kk - ff}{gg}$. Nimmt man nun für f, g, h und k Zahlen nach Belieben an, so bekommt man für m und n solche Werthe, da die Auflösung möglich ist.

Es sey z. E. $h = 3$, $k = 5$, $f = 1$ und $g = 2$; so wird $m = 2$ und $n = 6$. Anjetzt sind wir versichert, daß es möglich sey die zwey Formeln $pp + 2qq$ und $pp + 6qq$ zu Quadrate zu machen, weil solches geschieht wann $p = 1$ und $q = 2$. Die erste aber wird auf eine allgemeine Art ein Quadrat wann $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$; dann da wird $pp + 2qq = (rr + 2ss)^2$. Die andere Formel aber wird alsdann $pp + 6qq = r^4 + 20rrss + 4s^4$, wovon ein Fall bekant ist, da dieselbe ein Quadrat wird, nemlich wann $p = 1$ und $q = 2$, und welches geschieht wann $r = 1$ und $s = 1$, oder wann überhaupt $r = s$; dann da wird unsere Formel $25s^4$. Da wir nun diesen Fall wißen, so setzen wir $r = s + t$, so wird $rr = ss + 2st + tt$ und $r^4 = s^4 + 4s^3t + 6sstt + 4st^3 + t^4$, dahero unsere Formel seyn wird $25s^4 + 44s^3t + 26sstt + 4st^3 + t^4$, davon sey die Wurzel $5ss + fst + tt$, wovon das Quadrat ist

$$25s^4 + 10fs^3t + 10sstt + ffsstt + 2fst^3 + t^4,$$

wo sich die ersten und lezten Glieder von selbst aufheben. Man nehme nun f so an, daß sich auch die letzten ohne eines aufheben, welches geschieht wann $4 = 2f$ und $f = 2$; alsdann geben die übrigen durch sst dividirt diese Gleichung $44s + 26t = 10fs + 10t + fft = 20s + 14t$, oder $2s = -t$ und $\frac{s}{t} = -\frac{1}{2}$, dahero wird $s = -1$ und $t = 2$, oder $t = -2s$, folglich $r = -s$ und $rr = ss$, welches der bekante Fall selbst ist.

Man nehme f so an, daß sich die zweyten Glieder aufheben, welches geschieht wann $44 = 10f$, oder $f = \frac{22}{5}$; da dann die übrigen Glieder durch stt dividirt geben $26s + 4t = 10s + ffs + 2ft$, das ist $-\frac{84}{25}s = \frac{24}{5}t$, folglich $t = -\frac{7}{10}s$ und also $r = s + t = \frac{3}{10}s$, oder $\frac{r}{s} = \frac{3}{10}$: dahero $r = 3$, und $s = 10$; hieraus bekommen wir $p = 2ss - rr = 191$ und $q = 2rs = 60$, woraus unsere Formeln werden:

$$pp + 2qq = 43681 = 209^2, \quad \text{und} \quad pp + 6qq = 58081 = 241^2.$$

224.

Anmerckung: Dergleichen Zahlen für m und n, da sich unsere Formeln zu Quadrate machen laßen, können nach der obigen Art noch mehr gefunden werden. Es ist aber zu mercken, daß die Verhältniß dieser Zahlen m und n nach Belieben angenommen werden kann. Es sey diese Verhältniß wie a zu b, und man setze $m = az$ und $n = bz$, so kommt es nun darauf an wie man z bestimmen soll, daß diese beyde Formeln $pp + azqq$ und $pp + bzqq$ zu Quadraten gemacht werden können? welches wir in der folgenden Aufgabe zeigen wollen.

225.

IX. Frage: Wann a und b gegebene Zahlen sind; die Zahl z zu finden, daß sich diese beyde Formeln $pp + azqq$ und $pp + bzqq$ zu Quadraten machen laßen, und zugleich die kleinsten Werthe für p und q zu bestimmen?

Man setze $pp + azqq = rr$ und $pp + bzqq = ss$, und man multiplicire die erstere mit b die andere aber mit a, so giebt die Differenz derselben diese Gleichung $(b - a)pp = brr - ass$ und also $pp = \frac{brr - ass}{b - a}$, welche Formel also ein Quadrat seyn muß. Da nun solches geschieht wann $r = s$, so setze man um die Brüche weg zu bringen $r = s + (b - a)t$, so wird

$$pp = \frac{brr - ass}{b - a} = \frac{bss + 2b(b-a)st + b(b-a)^2tt - ass}{b - a}$$

$$= \frac{(b-a)ss + 2b(b-a)st + b(b-a)^2tt}{b - a} = ss + 2bst + b(b-a)tt.$$

Nun setze man $p = s + \frac{x}{y}t$, so wird

$$pp = ss + \frac{2x}{y}\cdot st + \frac{xx}{yy}tt = ss + 2bst + b(b-a)tt;$$

wo sich die ss aufheben, die übrigen Glieder aber durch t dividirt und mit yy multiplicirt geben $2bsyy + b(b-a)tyy = 2sxy + txx$, daraus

$$t = \frac{2sxy - 2bsyy}{b(b-a)yy - xx}, \quad \text{dahero} \quad \frac{t}{s} = \frac{2xy - 2byy}{b(b-a)yy - xx}.$$

Hieraus bekommt man $t = 2xy - 2byy$ und $s = b(b-a)yy - xx$, ferner $r = 2(b-a)xy - b(b-a)yy - xx$, und daraus

$$p = s + \frac{x}{y}\cdot t = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x - by)^2 - abyy.$$

Da wir nun p nebst r und s gefunden haben, so ist noch übrig z zu suchen. Man subtrahire zu diesem Ende die erste Gleichung $pp + azqq = rr$ von der andern $pp + bzqq = ss$, so giebt der Rest $zqq(b-a) = ss - rr = (s + r)\cdot(s - r)$. Da nun $s + r = 2(b-a)xy - 2xx$ und $s - r = 2b(b-a)yy - 2(b-a)xy$, oder $s + r = 2x((b-a)y - x)$ und $s - r = 2(b-a)y(by - x)$, so wird

$$(b-a)zqq = 2x((b-a)y - x)\cdot 2(b-a)y(by - x)$$

oder

$$zqq = 2x((b-a)y - x)\cdot 2y(by - x) \quad \text{oder} \quad zqq = 4xy((b-a)y - x)(by - x);$$

folglich

$$z = \frac{4xy((b-a)y - x)(by - x)}{qq}.$$

Daher für qq das größte Quadrat genommen werden muß, dadurch sich der Zehler theilen läßt; für p aber haben wir schon gefunden

$$p = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x - by)^2 - abyy,$$

woraus man sieht, daß diese Formeln leichter und einfacher werden, wann man setzet: $x = v + by$ oder $x - by = v$; dann da wird $p = vv - abyy$, und

$$z = \frac{4(v + by)\cdot y\cdot v(v + ay)}{qq} \quad \text{oder} \quad z = \frac{4vy(v + ay)(v + by)}{qq},$$

wo die Zahlen v und y nach Belieben genommen werden können, und alsdann findet man erstlich qq, indem dafür das größte Quadrat genommen wird, so in dem Zehler enthalten ist, woraus sich so dann z ergiebt; da dann $m = az$ und $n = bz$, endlich aber $p = vv - abyy$ wird; und hieraus bekommt man die gesuchten Formeln:

I.) $$pp + azqq = (vv - abyy)^2 + 4avy(v + ay)(v + by),$$

welche ein Quadrat ist, davon die Wurzel $r = -vv - 2avy - abyy$ ist.

II.) Die zweyte Formel aber wird

$$pp + bzqq = (vv - abyy)^2 + 4bvy(v + ay)(v + by),$$

welches auch ein Quadrat ist, davon die Wurzel $s = -vv - 2bvy - abyy$; wo die Werthe von r und s auch positiv genommen werden können; dieses wird dienlich seyn mit einigen Exempeln zu erläutern.

226.

I. Exempel: Es sey $a = -1$ und $b = +1$, und man suche Zahlen für z allso daß diese zwey Formeln $pp - zqq$ und $pp + zqq$ Quadrate werden können? die erstere nemlich $= rr$, und die andere $= ss$.

Hier wird $p = vv + yy$ und man hat also um z zu finden diese Formel zu betrachten $z = \frac{4vy(v-y)(v+y)}{qq}$, da wir dann für v und y verschiedene Zahlen annehmen und daraus für z die Werthe suchen wollen, wie hier folget:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	2	1	4	9	1
$v - y$	1	1	3	1	7	7
$v + y$	3	5	5	9	25	9
zqq	$4 \cdot 6$	$4 \cdot 30$	$16 \cdot 15$	$9 \cdot 16 \cdot 5$	$36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 7$	$16 \cdot 9 \cdot 14$
qq	4	4	16	$9 \cdot 16$	$36 \cdot 25 \cdot 16$	$16 \cdot 9$
z	6	30	15	5	7	14
p	5	13	17	41	337	65

woraus folgende Formeln aufgelöset und zu Quadrate gemacht werden können:

I. Können diese zwey Formeln zu Quadrate gemacht werden $pp - 6qq$ und $pp + 6qq$, welches geschieht, wann $p = 5$ und $q = 2$. Dann da wird die erste $= 25 - 24 = 1$; und die andere $= 25 + 24 = 49$.

II. Können auch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden $pp - 30qq$ und $pp + 30qq$, welches geschieht wann $p = 13$ und $q = 2$; dann da wird die erste $= 169 - 120 = 49$, die andere aber $= 169 + 120 = 289$.

III. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden $pp - 15qq$ und $pp + 15qq$, welches geschieht wann $p = 17$ und $q = 4$, dann da wird die erste $= 289 - 240 = 49$, und die andere $289 + 240 = 529$.

IV. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden $pp - 5qq$ und $pp + 5qq$, welches geschieht wann $p = 41$ und $q = 12$, dann da wird die erste $1681 - 720 = 961 = 31^2$, die andere aber $1681 + 720 = 2401 = 49^2$.

V. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden, $pp - 7qq$ und $pp + 7qq$, welches geschieht wann $p = 337$ und $q = 120$; dann da wird die erste $113\,569 - 100\,800 = 12\,769 = 113^2$, und die andere $113\,569 + 100\,800 = 214\,369 = 463^2$.

VI. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden, $pp - 14qq$ und $pp + 14qq$, welches geschieht wann $p = 65$ und $q = 12$; dann da wird die erste $4225 - 2016 = 2209 = 47^2$ und die andere $4225 + 2016 = 6241 = 79^2$.

227.

II. Exempel: Wann die beyden Zahlen m und n sich verhalten wie $1:2$, das ist wann $a = 1$ und $b = 2$, also $m = z$ und $n = 2z$, so sollen die Werthe für z gefunden werden, so daß diese Formeln $pp + zqq$ und $pp + 2zqq$ zu Quadraten gemacht werden können.

Man hat nicht nöthig hier die obigen zu allgemeinen Formeln zu gebrauchen, sondern dieses Exempel kann so gleich auf das vorige gebracht werden. Dann setzt man $pp + zqq = rr$ und. $pp + 2zqq = ss$, so bekommt man aus der erstern $pp = rr - zqq$ welcher Werth für pp in der zweyten gesetzt giebt $rr + zqq = ss$; folglich müßen diese zwey Formeln $rr - zqq$ und $rr + zqq$ zu Quadrate gemacht werden können, welches der Fall des vorigen Exempels ist. Also hat man auch hier für z folgende Werthe 6, 30, 15, 5, 7, 14 etc.

Eine solche Verwandelung kann auch allgemein angestellt werden. Wann wir annehmen, daß diese zwey Formeln $pp + mqq$ und $pp + nqq$ zu Quadraten gemacht werden können, so laßt uns setzen $pp + mqq = rr$ und $pp + nqq = ss$, so giebt die erstere $pp = rr - mqq$, und also die zweyte $ss = rr - mqq + nqq$ oder $rr + (n - m)qq = ss$; wann dahero die ersteren Formeln möglich sind, so sind auch diese $rr - mqq$ und $rr + (n - m)qq$ möglich; und da wir m und n unter sich verwechseln können, so sind auch diese möglich $rr - nqq$ und $rr + (m - n)qq$; sind aber jene Formeln unmöglich so sind auch diese unmöglich.

228.

III. Exempel: Es seyen die Zahlen m und n wie $1:3$, oder $a = 1$ und $b = 3$, also $m = z$ und $n = 3z$, so daß diese Formeln $pp + zqq$ und $pp + 3zqq$ zu Quadrate gemacht werden sollen.

Weil hier $a = 1$ und $b = 3$, so wird die Sache möglich so oft

$$zqq = 4vy(v + y)(v + 3y), \quad \text{und} \quad p = vv - 3yy.$$

Man nehme dahero für v und y folgende Werthe:

	I.	II.	III.	IV.	V.
v	1	3	4	1	16
y	1	2	1	8	9
$v + y$	2	5	5	9	25
$v + 3y$	4	9	7	25	43
zqq	$16 \cdot 2$	$4 \cdot 9 \cdot 30$	$4 \cdot 4 \cdot 35$	$4 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 2$	$4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 43$
qq	16	$4 \cdot 9$	$4 \cdot 4$	$4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 25$	$4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25$
z	2	30	35	2	43
p	2	3	13	191	13

Hier haben wir nun zwey Fälle für $z = 2$, daraus wir auf zweyerley Art diese Formeln $pp + 2qq$ und $pp + 6qq$ zu Quadraten machen können, erstlich geschieht dieses wann $p = 2$ und $q = 4$, folglich auch wann $p = 1$ und $q = 2$; dann da wird $pp + 2qq = 9$ und $pp + 6qq = 25$. Hernach geschieht es auch wann $p = 191$ und $q = 60$, dann da wird $pp + 2qq = (209)^2$ und $pp + 6qq = (241)^2$. Ob aber nicht auch seyn könnte $z = 1$? welches geschehen würde wann für zqq ein Quadrat herauskäme, ist schwer zu entscheiden. Wollte man nun diese Frage erörtern, ob diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht? so könnte man die Untersuchung auf folgende Art anstellen.

229.

Man soll allso untersuchen ob diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht? Man setze $pp + qq = rr$ und $pp + 3qq = ss$, so sind folgende Puncte zu bedencken:

I. Können die Zahlen p und q als untheilbar unter sich angesehen werden; dann wann sie einen gemeinen Theiler hätten, so würden die Formeln noch Quadrate bleiben, wann p und q dadurch getheilt würde.

II. Kann p keine gerade Zahl seyn; dann da würde q ungerad, und also die zweyte Formel eine Zahl von dieser Art $4n + 3$ seyn, welche kein Quadrat werden kann; dahero ist p nothwendig ungerad, und pp eine Zahl von dieser Art $8n + 1$.

III. Da nun p ungerad ist, so muß aus der ersten Form q nicht nur gerad, sondern so gar durch 4 theilbar seyn, damit qq eine Zahl werde von dieser Art $16n$; und $pp + qq$ von dieser Art $8n + 1$.

IV. Ferner kann p nicht durch 3 theilbar seyn; dann da würde pp sich durch 9 theilen laßen qq aber nicht, folglich $3qq$ nur durch 3, nicht aber durch 9, und also auch $pp + 3qq$ durch 3 nicht aber durch 9, und demnach kein Quadrat seyn; folglich kann die Zahl p nicht durch 3 theilbar seyn, dahero pp von der Art $3n + 1$ seyn wird.

V. Da sich p nicht durch 3 theilen läßt, so muß sich q durch 3 theilen laßen; dann wäre q nicht durch 3 theilbar, so wäre qq eine Zahl von dieser Art $3n + 1$, und dahero $pp + qq$ von dieser Art $3n + 2$, welche kein Quadrat seyn kann: folglich muß q durch 3 theilbar seyn.

VI. Auch kann p nicht durch 5 theilbar seyn; dann wäre dieses, so wäre q nicht durch 5 theilbar und qq eine Zahl von der Art $5n + 1$ oder $5n + 4$, also $3qq$ eine Zahl von der Art $5n + 3$ oder $5n + 2$, und von welcher Art auch $pp + 3qq$ seyn würde, also könnte diese Formel kein Quadrat seyn; dahero dann p nothwendig nicht durch 5 theilbar seyn kann, und also pp ein Zahl von der Art $5n + 1$ oder $5n + 4$ seyn muß.

VII. Da nun p nicht durch 5 theilbar ist, so wollen wir sehen, ob sich q durch 5 theilen laße oder nicht? Wäre q nicht theilbar durch 5, so wäre $3qq$ von dieser Art $5n + 2$ oder $5n + 3$, wie wir gesehen haben, und da pp entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$, so würde $pp + 3qq$ seyn entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$ eben wie pp; es sey

$pp = 5n + 1$, so müßte seyn $qq = 5n + 4$, weil sonst $pp + qq$ kein Quadrat seyn könnte: alsdann aber wäre $3qq = 5n + 2$, und $pp + 3qq = 5n + 3$, welches kein Quadrat sein kann; wäre aber $pp = 5n + 4$, so müßte seyn $qq = 5n + 1$ und $3qq = 5n + 3$ folglich $pp + 3qq = 5n + 2$, welches auch kein Quadrat seyn kann: woraus folget daß qq durch 5 theibar seyn müße.

VIII. Da nun q erstlich durch 4, hernach durch 3, und drittens auch durch 5 theilbar seyn muß, so muß q eine solche Zahl seyn $4 \cdot 3 \cdot 5m$ oder $q = 60m$; dahero unsere Formeln seyn würden $pp + 3600mm = rr$ und $pp + 10800mm = ss$; da dann die erste von der zweyten subtrahirt giebt $7200mm = ss - rr = (s + r)(s - r)$; also daß $s + r$ und $s - r$ Factores seyn müßen von $7200mm$: wobey zu mercken daß so wohl s als r ungerade Zahlen seyn müßen, und dabey unter sich untheilbar.

IX. Es sey demnach $7200mm = 4fg$ oder die Factores davon $2f$ und $2g$, und man setze $s + r = 2f$ und $s - r = 2g$, so wird $s = f + g$ und $r = f - g$, da dann f und g unter sich untheilbar seyn müßen, und die eine gerad und die andere ungerad. Da nun $fg = 1800mm$, so muß man $1800mm$ in zwey Factores zerlegen, deren einer gerad, der andere aber ungerad sey, beyde aber unter sich keinen gemeinen Theiler haben.

X. Ferner ist auch zu mercken, daß da $rr = pp + qq$ und also r ein Theiler von $pp + qq$, die Zahl $r = f - g$ auch eine Summe von zwey Quadraten seyn, und weil dieselbe ungerad, in der Form $4n + 1$ enthalten seyn müße.

XI. Nehmen wir erstlich an $m = 1$, so wird $fg = 1800 = 8 \cdot 9 \cdot 25$, woraus folgende Zerlegungen entspringen: $f = 1800$ und $g = 1$, oder $f = 200$ und $g = 9$, oder $f = 72$ und $g = 25$, oder $f = 225$ und $g = 8$; aus der ersten wird $r = f - g = 1799 = 4n + 3$; nach der andern würde $r = f - g = 191 = 4n + 3$; nach der dritten würde $r = f - g = 47 = 4n + 3$; nach der vierten aber $r = f - g = 217 = 4n + 1$; dahero die drey ersten wegfallen, und nur die vierte übrig bleibt; woraus man überhaupt schließen kann, daß der größere Factor ungerad, der kleinere aber gerad sein müße; aber hier kann auch der Werth $r = 217$ nicht statt finden, weil sich diese Zahl durch 7 theilen läßt, die keine Summe von zwey Quadraten ist.

XII. Nimmt man $m = 2$, so wird $fg = 7200 = 32 \cdot 225$, daher nimmt man $f = 225$ und $g = 32$, also daß $r = f - g = 193$, welche Zahl wohl eine

Summe von zwey Quadraten ist und also verdienet probirt zu werden: da nun $q = 120$ und $r = 193$, so wird weil $pp = rr - qq = (r+q)\cdot(r-q)$, allso $r + q = 313$ und $r - q = 73$, allso sieht man wohl daß für pp kein Quadrat heraus komme, weil diese Factoren nicht Quadrate sind. Wollte man sich die Mühe geben für m noch andere Zahlen zu nehmen, so würde doch alle Arbeit vergebens seyn, wie wir noch zeigen wollen.

230.

Lehr-Satz. Es ist nicht möglich, daß diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zugleich Quadrate werden; oder in den Fällen, da die eine ein Quadrat wird, ist die andere gewis keines.

Welches also bewiesen wird.

Da p ungerad und q gerad ist, wie wir gesehen haben, so kann $pp + qq$ nicht anders ein Quadrat seyn, als wann $q = 2rs$ und $p = rr - ss$; die andere aber $pp + 3qq$ kann nicht anders ein Quadrat seyn, als wann $q = 2tu$ und $p = tt - 3uu$ oder $p = 3uu - tt$. Weil nun in beyden Fällen q ein doppeltes Product seyn muß, so setze man für beyde $q = 2abcd$ und nehme für die erste $r = ab$ und $s = cd$; für die andere aber $t = ac$ und $u = bd$, so wird für die erstere $p = aabb - ccdd$, für die andere aber $p = aacc - 3bbdd$, oder $p = 3bbdd - aacc$, welche beyde Werthe einerley seyn müßen; dahero wir bekommen entweder $aabb - ccdd = aacc - 3bbdd$, oder $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$; wobey zu mercken daß die Zahlen a, b, c und d überhaupt kleiner sind als p und q. Wir müßen also einen jeden dieser beyden Fälle besonders erwegen; aus dem erstern erhalten wir $aabb + 3bbdd = aacc + ccdd$ oder $bb(aa + 3dd) = cc(aa + dd)$, daraus wird $\frac{bb}{cc} = \frac{aa + dd}{aa + 3dd}$, welcher Bruch ein Quadrat sein muß. Hier kann aber der Zehler und Nenner keinen andern gemeinen Theiler haben als 2, weil die Differenz darzwischen $2dd$ ist. Sollte dahero 2 ein gemeiner Theiler seyn, so müßte so wohl $\frac{aa + dd}{2}$ als auch $\frac{aa + 3dd}{2}$ ein Quadrat seyn, beyde Zahlen aber a und d sind in diesem Fall ungerad und also ihre Quadrate von der Form $8n + 1$, dahero die letztere Formel $\frac{aa + 3dd}{2}$ diese Form $4n + 2$ haben wird und kein Quadrat seyn kann; folglich kann 2 kein gemeiner Theiler seyn, sondern der Zehler $aa + dd$ und der Nenner $aa + 3dd$ sind unter sich untheilbar; dahero ein jeder für sich ein Quadrat seyn muß. Weil nun diese Formeln den ersten ähnlich sind, so folgt, daß wann die ersten Quadrate wären, auch in kleinern Zahlen gleiche Formeln Quadrate seyn würden, und so könnte man immer auf kleinere Zahlen kommen. Da es nun in kleinern Zahlen dergleichen nicht giebt, so kann es auch nicht in den größten Zahlen dergleichen geben.

Dieser Schluß ist aber nur in so fern richtig, als auch der obige zweyte Fall $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$ auf dergleichen führt; hieraus aber wird $aabb + aacc = 3bbdd + ccdd$, oder $aa(bb + cc) = dd(3bb + cc)$, und dahero $\frac{aa}{dd} = \frac{bb + cc}{3bb + cc} = \frac{cc + bb}{cc + 3bb}$, welcher Bruch ein Quadrat sein muß, allso daß dadurch der vorige Schluß vollkommen bestätiget wird; indem wann es in den größten Zahlen solche Fälle gäbe, da $pp + qq$ und $pp + 3qq$ Quadrate wären, auch dergleichen in den kleinsten Zahlen vorhanden seyn müßten, welches doch nicht statt findet.

231.

XII. Frage: Man soll drey solche Zahlen finden x, y und z, so daß wann je zwey mit einander multiplicirt werden und zum Product 1 addirt wird, ein Quadrat herauskomme?

Es müßen also diese drey Formeln zu Quadraten gemacht werden:

$$\text{I.)}\ xy + 1; \qquad \text{II.)}\ xz + 1; \qquad \text{III.)}\ yz + 1.$$

Man setze vor die beyden letztern $xz + 1 = pp$ und $yz + 1 = qq$, so findet man daraus $x = \frac{pp - 1}{z}$ und $y = \frac{qq - 1}{z}$, woraus die erste Formel wird $\frac{(pp - 1)(qq - 1)}{zz} + 1$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch mit zz multiplicirt, das ist $(pp - 1)(qq - 1) + zz$, welche leicht dazu gemacht werden kann. Dann setzt man die Wurzel davon $= z + r$, so bekommt man

$$(pp - 1)(qq - 1) = 2rz + rr, \quad \text{und dahero} \quad z = \frac{(pp - 1)(qq - 1) - rr}{2r}$$

wo für p, q und r beliebige Zahlen angenommen werden können.

Es sey z. E. $r = -pq - 1$, so wird $rr = ppqq + 2pq + 1$ und

$$z = \frac{-2pq - pp - qq}{-2pq - 2} = \frac{pp + 2pq + qq}{2pq + 2},$$

folglich

$$x = \frac{(pp - 1)(2pq + 2)}{pp + 2pq + qq} = \frac{2(pq + 1)(pp - 1)}{(p + q)^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{2(pq + 1)(qq - 1)}{(p + q)^2}.$$

Will man aber gantze Zahlen haben, so setze man für die erste Formel $xy + 1 = pp$ und nehme $z = x + y + q$, so wird die zweyte Formel

$$xx + xy + xq + 1 = xx + qx + pp,$$

die dritte aber wird

$$xy + yy + qy + 1 = yy + qy + pp,$$

welche offenbar Quadrate werden, wann man nimmt $q = \pm 2p$; dann da wird die zweyte $xx \pm 2px + pp$ davon die Wurzel ist $x \pm p$, die dritte aber wird $yy \pm 2py + pp$ davon die Wurzel ist $y \pm p$; dahero haben wir diese sehr nette Auflösung: $xy + 1 = pp$ oder $xy = pp - 1$, welches für eine jede Zahl, so für p angenommen wird, leicht geschehen kann; und hernach ist die dritte Zahl auf eine doppelte Art entweder $z = x + y + 2p$ oder $z = x + y - 2p$, welches wir durch folgende Exempel erläutern wollen:

I. Man nehme $p = 3$, so wird $pp - 1 = 8$; nun setze man $x = 2$ und $y = 4$, so wird entweder $z = 12$ oder $z = 0$: und also sind die drey gesuchten Zahlen 2, 4 und 12.

II. Es sey $p = 4$, so wird $pp - 1 = 15$; nun nehme man $x = 5$ und $y = 3$, so wird $z = 16$ oder $z = 0$: und sind die drey gesuchten Zahlen 3, 5 und 16.

III. Es sey $p = 5$, so wird $pp - 1 = 24$; nun nehme man $x = 3$ und $y = 8$, so wird $z = 21$, oder auch $z = 1$: woraus folgende Zahlen entspringen, entweder 1, 3 und 8, oder 3, 8 und 21.

232.

XIII. Frage: Man suche drey gantze Zahlen x, y und z, so daß wann zu dem Product aus je zweyen eine gegebene Zahl a addirt wird, jedes mahl ein Quadrat heraus komme?

Es müßen also diese drey Formeln Quadrate werden:

$$\text{I.)}\ xy + a; \qquad \text{II.)}\ xz + a; \qquad \text{III.)}\ yz + a.$$

Nun setze man für die erste $xy + a = pp$, und nehme $z = x + y + q$, so wird die zweyte $xx + xy + xq + a = xx + qx + pp$ und die dritte $xy + yy + yq + a = yy + qy + pp$, welche beyde Quadrate werden, wann $q = \pm 2p$; also daß $z = x + y \pm 2p$, und dahero für z zwey Werthe gefunden werden können.

233.

XIV. Frage: Man verlangt vier gantze Zahlen x, y, z und v, so daß wann zum Product aus je zweyen eine gegebene Zahl a addirt wird, jedesmahl ein Quadrat herauskomme?

Es müßen also folgende sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden:

$$\text{I.) } xy + a; \qquad \text{II.) } xz + a; \qquad \text{III.) } yz + a;$$
$$\text{IV.) } xv + a; \qquad \text{V.) } yv + a; \qquad \text{VI.) } zv + a.$$

Nun setze man vor die erste $xy + a = pp$ und nehme $z = x + y + 2p$, so wird die zweyte und dritte Formel ein Quadrat. Ferner nehme man $v = x + y - 2p$, so wird auch die vierte und die fünfte ein Quadrat, und bleibt also nur noch die sechste übrig, welche seyn wird $xx + 2xy + yy - 4pp + a$, welche ein Quadrat seyn muß. Da nun $pp = xy + a$, so wird diese letzte Formel $xx - 2xy + yy - 3a$, folglich müßen noch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden:

$$\text{I.) } xy + a = pp \quad \text{und} \quad \text{II.) } (x - y)^2 - 3a.$$

Von der letztern sey die Wurzel $(x - y) - q$, so wird

$$(x - y)^2 - 3a = (x - y)^2 - 2q(x - y) + qq,$$

und da wird $-3a = -2q(x - y) + qq$ und folglich $x - y = \frac{qq + 3a}{2q}$ oder $x = y + \frac{qq + 3a}{2q}$; hieraus wird $pp = yy + \frac{qq + 3a}{2q} y + a$. Man nehme $p = y + r$, so wird $2ry + rr = \frac{qq + 3a}{2q} y + a$, oder $4qry + 2qrr = (qq + 3a)y + 2aq$, oder $2qrr - 2aq = (qq + 3a)y - 4qry$ und $y = \frac{2qrr - 2aq}{qq + 3a - 4qr}$, wo q und r nach Belieben angenommen werden können, und es also nur darauf ankommt, daß vor x und y gantze Zahlen herauskommen. Dann weil $p = y + r$ so werden auch z und v gantz seyn. Hier kommt es aber hauptsächlich auf die Beschaffenheit der gegebenen Zahl a an, wo die Sache mit den gantzen Zahlen noch einige Schwierigkeiten haben könnte; allein es ist zu bemercken, daß diese Auflösung schon dadurch sehr eingeschränckt worden, daß den Buchstaben z und v die Werthe $x + y \pm 2p$ gegeben worden, indem dieselben nothwendig noch viel andere haben könnten. Wir wollen zu diesem Ende über diese Frage folgende Betrachtungen anstellen, welche auch in andern Fällen ihren Nutzen haben können.

I. Wann $xy + a$ ein Quadrat seyn soll und also $xy = pp - a$, so müßen die Zahlen x und y immer in dieser ähnlichen Form $rr - ass$ enthalten seyn; wann wir demnach setzen $x = bb - acc$ und $y = dd - aee$, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a(be - cd)^2$. Ist nun $be - cd = \pm 1$, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a$, und also $xy + a = (bd - ace)^2$.

II. Setzen wir nun ferner $z = ff - agg$ und nehmen die Zahlen f und g allso an, daß $bg - cf = \pm 1$ und auch $dg - ef = \pm 1$, so werden auch diese Formeln $xz + a$ und $yz + a$ Quadrate werden. Es kommt also nur darauf an, solche Zahlen für b, c und d, e und auch für f und g zu finden, daß die obige Eigenschaft erfüllt werde.

III. Wir wollen diese drey Paar Buchstaben durch diese Brüche vorstellen $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ und $\frac{f}{g}$, welche demnach also beschaffen seyn müßen, daß die Differenz zwischen je zweyen durch einen Bruch ausgedrückt werde, dessen Zehler $= 1$. Dann da $\frac{b}{c} - \frac{d}{e} = \frac{be - dc}{ce}$ so muß dessen Zehler, wie wir gesehen haben, allerdings ± 1 seyn. Man kann hier einen von diesen Brüchen nach Belieben annehmen, und leicht einen andern dazu finden, so daß die gemeldte Bedingung statt finde.

Es sey z. E. der erste $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, so muß der zweyte $\frac{d}{e}$ diesem beynahe gleich seyn. Es sey $\frac{d}{e} = \frac{4}{3}$, so wird die Differenz $z = \frac{1}{6}$. Man kann auch diesen zweyten Bruch aus dem ersten auf eine allgemeine Art bestimmen; dann da $\frac{3}{2} - \frac{d}{e} = \frac{3e - 2d}{2e}$, so muß seyn $3e - 2d = 1$, also $2d = 3e - 1$ und $d = e + \frac{e-1}{2}$. Man nehme dahero $\frac{e-1}{2} = m$ oder $e = 2m + 1$, so bekommen wir $d = 3m + 1$ und unser zweyter Bruch wird seyn $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$. Eben so kann auch zu einem jeglichen ersten Bruch der zweyte gefunden werden, wovon wir folgende Exempel beyfügen wollen.

$\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+2}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+3}{5m+2}$	$\frac{11m+3}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

IV. Hat man zwey solche Brüche für $\frac{b}{c}$ und $\frac{d}{e}$ gefunden, so ist es gantz leicht dazu einen dritten $\frac{f}{g}$ zu finden, welcher mit den beyden erstern in gleicher Verhältniß steht. Man darf nur setzen $f = b + d$ und $g = c + e$, also daß $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, dann da aus den zwey ersten ist $be - cd = \pm 1$ so wird $\frac{f}{g} - \frac{b}{c} = \frac{\pm 1}{cc + ce}$. Eben so wird auch der zweyte weniger den dritten $\frac{f}{g} - \frac{d}{e} = \frac{be - cd}{ee + ce} = \frac{\pm 1}{ce + ee}$.

V. Hat man nun drey solche Brüche gefunden $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ und $\frac{f}{g}$, so kann man daraus so gleich unsere Frage für drey Zahlen x, y und z auflösen, also daß diese drey Formeln $xy + a$, $xz + a$ und $yz + a$ Quadrate werden. Dann man darf nur setzen $x = bb - acc$, $y = dd - aee$ und $z = ff - agg$. Man nehme z. E. aus der obigen Tafel $\frac{b}{c} = \frac{5}{3}$ und $\frac{d}{e} = \frac{7}{4}$, so wird $\frac{f}{g} = \frac{12}{7}$; woraus man erhält $x = 25 - 9a$, $y = 49 - 16a$ und $z = 144 - 49a$; dann da wird

$$xy + a = 1225 - 840a + 144aa = (35 - 12a)^2,$$

ferner wird

$$xz + a = 3600 - 2520a + 441aa = (60 - 21a)^2,$$

und

$$yz + a = 7056 - 4704a + 784aa = (84 - 28a)^2.$$

234.

Sollen aber nach dem Inhalt der Frage vier dergleichen Zahlen x, y, z und v gefunden werden, so muß man zu den drey obigen Brüchen noch einen vierten hinzufügen. Es seyen demnach die drey erstere $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, und man setze den vierten Bruch $\frac{h}{k} = \frac{d+f}{e+g} = \frac{2d+b}{2e+c}$, so daß er mit dem zweyten und dritten in dem gehörigen Verhältniß stehe; wann man nun nimmt

$$x = bb - acc; \quad y = dd - aee; \quad z = ff - agg \quad \text{und} \quad v = hh - akk,$$

so werden schon folgende Bedingungen erfüllt:

$$\text{I.)}\ xy + a = \square\text{*)}; \quad \text{II.)}\ xz + a = \square; \quad \text{III.)}\ yz + a = \square;$$

$$\text{IV.}\ yv + a = \square; \quad \text{V.}\ zv + a = \square;$$

es ist also nur noch übrig, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde, welches von selbsten nicht geschieht, weil der erste Bruch mit dem vierten nicht in dem gehörigen Verhältniß steht. Es ist demnach nöthig in den drey ersten Brüchen noch die unbestimmte Zahl m beyzubehalten, und dieselbe also zu bestimmen, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde.

*) $\square$ deutet hier allenthalben eine Quadrat-Zahl an.

VI. Man nehme demnach aus obiger Tabelle den ersten Fall und setze $\frac{b}{c}=\frac{3}{2}$ und $\frac{d}{e}=\frac{3m+1}{2m+1}$, so wird $\frac{f}{g}=\frac{3m+4}{2m+3}$ und $\frac{h}{k}=\frac{6m+5}{4m+4}$. Hieraus wird $x=9-4a$ und $v=(6m+5)^2-a(4m+4)^2$ also

$$xv+a=9(6m+5)^2-4a(6m+5)^2-9a(4m+4)^2+4aa(4m+4)^2$$

oder

$$xv+a=9(6m+5)^2-a(288mm+528m+244)+4aa(4m+4)^2,$$

welche leicht zu einem Quadrat gemacht werden kann, weil mm mit einem Quadrat multiplicirt ist; wobei wir uns aber nicht aufhalten wollen.

VII. Man kann auch solche Brüche dergleichen nöthig sind auf eine allgemeinere Art anzeigen: dann es sey

$$\frac{b}{c}=\frac{I}{1},\ \frac{d}{e}=\frac{nI-1}{n};\quad \text{so wird}\quad \frac{f}{g}=\frac{nI+I-1}{n+1}\quad \text{und}\quad \frac{h}{k}=\frac{2nI+I-2}{2n+1};$$

man setze in dem letzten $2n+1=m$, so wird derselbe $\frac{Im-2}{m}$, folglich aus dem ersten $x=II-a$ und aus dem letzten $v=(Im-2)^2-amm$. Allso ist nur noch übrig, daß $xv+a$ ein Quadrat werde. Da nun $v=(II-a)mm-4Im+4$ und also

$$xv+a=(II-a)^2mm-4(II-a)Im+4II-3a,$$

welches ein Quadrat seyn muß; davon setze man nun die Wurzel

$$(II-a)m-p,\quad \text{wovon das Quadrat}\quad (II-a)^2mm-2(II-a)mp+pp,$$

woraus wir erhalten,

$$-4(II-a)Im+4II-3a=-2(II-a)mp+pp\quad \text{und}\quad m=\frac{pp-4II+3a}{(II-a)(2p-4I)}.$$

Man nehme $p=2I+q$, so wird $m=\frac{4Iq+qq+3a}{2q(II-a)}$, wo für I und q beliebige Zahlen genommen werden können.

Wäre z. E. $a=1$ so nehme man $I=2$, da wird $m=\frac{4q+qq+3}{6q}$: setzt man $q=1$ so wird $m=\frac{4}{3}$ und $m=2n+1$; wir wollen aber hierbey nicht weiter stehen bleiben, sondern zur folgenden Frage fortschreiten.[1])

1) Hier liegt ein Versehen EULERS vor. Für $I=2$ ergiebt sich $m=\frac{8q+qq+3}{6q}$, was für $q=1$ zu $m=2$ führt. Dann aber wird $v=0$. H. W.

235.

XV. Frage: Man verlangt drey solche Zahlen x, y und z, daß so wohl die Summe als die Differenz von je zweyen ein Quadrat werde?

Es müßen also die folgende sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden:

$$\text{I.})\ x+y;\qquad \text{II.})\ x+z;\qquad \text{III.})\ y+z;$$
$$\text{IV.})\ x-y;\qquad \text{V.})\ x-z;\qquad \text{VI.})\ y-z.$$

Man fange bey den drey letzten an, und setze $x-y=pp$, $x-z=qq$ und $y-z=rr$, so bekommen wir aus den beyden letzten

$$x=qq+z \quad \text{und} \quad y=rr+z,$$

dahero die erstere giebt $x-y=qq-rr=pp$, oder $qq=pp+rr$, also daß die Summe der Quadraten $pp+rr$ ein Quadrat seyn muß, nemlich qq, welches geschieht wann $p=2ab$ und $r=aa-bb$, dann da wird $q=aa+bb$. Wir wollen aber inzwischen die Buchstaben p, q und r beybehalten und die drey erstern Formeln betrachten, da dann erstlich $x+y=qq+rr+2z$; zweytens $x+z=qq+2z$; drittens $y+z=rr+2z$. Man setze für die erstere

$$qq+rr+2z=tt, \quad \text{so ist} \quad 2z=tt-qq-rr;$$

dahero dann noch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden müßen $tt-rr=\square$ und $tt-qq=\square$, das ist

$$tt-(aa-bb)^2=\square \quad \text{und} \quad tt-(aa+bb)^2=\square,$$

welche diese Gestalten annehmen,

$$tt-a^4-b^4+2aabb \quad \text{und} \quad tt-a^4-b^4-2aabb;$$

weil nun so wohl $cc+dd+2cd$ als $cc+dd-2cd$ ein Quadrat ist, so sieht man daß wir unsern Endzweck erreichen, wann wir $tt-a^4-b^4$ mit $cc+dd$ und $2aabb$ mit $2cd$ vergleichen. Um dieses zu bewerckstelligen, so laßet uns setzen $cd=aabb=ffgghhkk$ und nehmen $c=ffgg$ und $d=hhkk$; $aa=ffhh$ und $bb=ggkk$ oder $a=fh$ und $b=gk$, woraus die erstere Gleichung

$$tt-a^4-b^4=cc+dd$$

diese Form erhält

$$tt-f^4h^4-g^4k^4=f^4g^4+h^4k^4 \quad \text{und also} \quad tt=f^4g^4+f^4h^4+h^4k^4+g^4k^4,$$

das ist $tt = (f^4 + k^4)(g^4 + h^4)$ welches Product also ein Quadrat seyn muß, davon aber die Auflösung schwer fallen dürfte.

Wir wollen dahero die Sache auf eine andere Art angreiffen, und aus den drey erstern Gleichungen $x - y = pp$; $x - z = qq$; $y - z = rr$ die Buchstaben y und z bestimmen, welche seyn werden $y = x - pp$ und $z = x - qq$, also daß $qq = pp + rr$. Nun werden die ersten Formeln

$$x + y = 2x - pp, \quad x + z = 2x - qq;$$

und

$$y + z = 2x - pp - qq;$$

vor diese letzte setze man $2x - pp - qq = tt$, also daß $2x = tt + pp + qq$ und nur noch diese Formeln $tt + qq$ und $tt + pp$ übrig bleiben, welche zu Quadraten gemacht werden müssen. Da nun aber seyn muß $qq = pp + rr$, so setze man $q = aa + bb$, und $p = aa - bb$, so wird $r = 2ab$; woraus unsere Formeln seyn werden:

$$\text{I.)} \quad tt + (aa + bb)^2 = tt + a^4 + b^4 + 2aabb = \square$$

$$\text{II.)} \quad tt + (aa - bb)^2 = tt + a^4 + b^4 - 2aabb = \square .$$

Vergleichen wir nun hier wiederum $tt + a^4 + b^4$ mit $cc + dd$, und $2aabb$ mit $2cd$, so erreichen wir unsern Endzweck: wir setzen demnach wie oben $c = ffgg$, $d = hhkk$ und $a = fh$, $b = gk$; so wird $cd = aabb$, und muß noch seyn $tt + f^4h^4 + g^4k^4 = cc + dd = f^4g^4 + h^4k^4$; woraus folget

$$tt = f^4g^4 - f^4h^4 + h^4k^4 - g^4k^4 = (f^4 - k^4)(g^4 - h^4).$$

Die Sache kommt also darauf an, daß zwey Differenzen zwischen zweyen Biquadraten gefunden werden, als $f^4 - k^4$ und $g^4 - h^4$, welche mit einander multiplicirt ein Quadrat machen.

Wir wollen zu diesem End die Formel $m^4 - n^4$ betrachten und zusehen was für Zahlen daraus entspringen, wann für m und n gegebene Zahlen genommen werden, und dabey die Quadraten, so darinnen enthalten sind, besonders bemercken. Weil nun $m^4 - n^4 = (mm - nn)(mm + nn)$, so wollen wir daraus folgendes Täfelgen machen.

Tabelle

für die Zahlen welche in der Form $m^4 - n^4$ enthalten sind

mm	nn	$mm - nn$	$mm + nn$	$m^4 - n^4$
4	1	3	5	$3 \cdot 5$
9	1	8	10	$16 \cdot 5$
9	4	5	13	$5 \cdot 13$
16	1	15	17	$3 \cdot 5 \cdot 17$
16	9	7	25	$25 \cdot 7$
25	1	24	26	$16 \cdot 3 \cdot 13$
25	9	16	34	$16 \cdot 2 \cdot 17$
49	1	48	50	$25 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 3$
49	16	33	65	$3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$
64	1	63	65	$9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
81	49	32	130	$64 \cdot 5 \cdot 13$
121	4	117	125	$25 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 13$
121	9	112	130	$16 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
121	49	72	170	$144 \cdot 5 \cdot 17$
144	25	119	169	$169 \cdot 7 \cdot 17$
169	1	168	170	$16 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$
169	81	88	250	$25 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 11$
225	64	161	289	$289 \cdot 7 \cdot 23$

Hieraus können wir schon einige Auflösungen geben: man nehme nemlich $ff = 9$ und $kk = 4$, so wird $f^4 - k^4 = 13 \cdot 5$: ferner nehme man $gg = 81$, und $hh = 49$, so wird $g^4 - h^4 = 64 \cdot 5 \cdot 13$, woraus $tt = 64 \cdot 25 \cdot 169$; folglich $t = 520$. Da nun $tt = 270400$; $f = 3$; $g = 9$; $k = 2$; $h = 7$, so bekommen wir $a = 21$; $b = 18$; hieraus $p = 117$, $q = 765$ und $r = 756$; daraus findet man

$$2x = tt + pp + qq = 869314 \quad \text{und also} \quad x = 434657;$$

dahero ferner $y = x - pp = 420968$; und endlich $z = x - qq = -150568$, welche Zahl auch positiv genommen werden kann, weil alsdann die Summe in der Differenz und umgekehrt die Differenz in der Summe verwandelt werden; folglich sind unsere drey gesuchten Zahlen:

$$x = 434657$$
$$y = 420968$$
$$z = 150568$$

dahero wird $x + y = 855625 = (925)^2$

$x + z = 585225 = (765)^2$

$y + z = 571536 = (756)^2$

und weiter $x - y = 13689 = (117)^2$

$x - z = 284089 = (533)^2$

$y - z = 270400 = (520)^2$

Noch andere Zahlen können gefunden werden aus der obigen Tabelle, wann wir setzen $ff = 9$, $kk = 4$ und $gg = 121$, $hh = 4$; dann daraus wird $tt = 13 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 25 = 9 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 169$, also daß $t = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13 = 975$. Weil nun $f = 3$, $g = 11$, $k = 2$ und $h = 2$, so wird $a = fh = 6$ und $b = gk = 22$, hieraus wird $p = aa - bb = -448$, $q = aa + bb = 520$ und $r = 2ab = 264$, daher bekommen wir

$$2x = tt + pp + qq = 950625 + 200704 + 270400 = 1421729,$$

dahero $x = \frac{1421729}{2}$, daraus $y = x - pp = \frac{1020821}{2}$ und $z = x - qq = \frac{880929}{2}$. Nun ist zu mercken, daß wann diese Zahlen die gesuchte Eigenschaft haben, eben dieselben durch ein jegliches Quadrat multiplicirt, diese nemliche Eigenschaft behalten müßen. Man nehme also die gefundenen Zahlen viermal größer, so werden die drey folgenden gleichfalls ein genüge leisten:

$$x = 2843458, \quad y = 2040642 \quad \text{und} \quad z = 1761858,$$

welche größer sind als die vorhergehenden; also daß jene für die kleinsten möglichen gehalten werden können.

236.

XVI. Frage: Man verlangt drey Quadrat-Zahlen, so daß die Differenz zwischen je zweyen ein Quadrat werde?

Die vorige Auflösung dienet uns auch um diese aufzulösen. Dann wann x, y und z solche Zahlen sind, daß diese Formeln Quadrate werden

I.) $x + y$; III.) $x + z$; V.) $y + z$;
II.) $x - y$; IV.) $x - z$; VI.) $y - z$;

so wird auch das Product aus der ersten und zweyten $xx - yy$ ein Quadrat, ingleichen auch das Product von der dritten und vierten $xx - zz$, und endlich auch das Product aus der fünften und sechsten $yy - zz$ ein Quadrat seyn, dahero die drey hier gesuchten Quadrate seyn werden xx, yy, zz. Allein diese Zahlen werden sehr groß, und es giebt ohne Zweiffel weit kleinere, weil es eben nicht nöthig ist, daß um $xx - yy$ zu einem Quadrat zu machen, auch $x + y$ und $x - y$ ein jedes besonders ein Quadrat seyn müße, indem z. E. $25 - 9$ ein Quadrat ist, da doch weder $5 + 3$ noch $5 - 3$ ein Quadrat ist. Wir wollen also diese Frage besonders auflösen und zuerst bemercken, daß für das eine Quadrat 1 gesetzt werden kann. Dann wann $xx - yy$, $xx - zz$ und $yy - zz$ Quadrate sind, so bleiben dieselben auch Quadrate, wann sie durch zz dividirt werden; dahero diese Formeln zu Quadraten gemacht werden müßen $\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz} = \square$, $\frac{xx}{zz} - 1 = \square$, und $\frac{yy}{zz} - 1 = \square$. Alsso kommt die Sache nur auf diese zwey Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ an; nimmt man nun

$$\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1} \quad \text{und} \quad \frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1},$$

so werden die zwey letzere Bedingungen erfüllt; dann da wird

$$\frac{xx}{zz} - 1 = \frac{4pp}{(pp-1)^2} \quad \text{und} \quad \frac{yy}{zz} - 1 = \frac{4qq}{(qq-1)^2}.$$

Es ist also nur noch übrig die erste Formel zu einem Quadrat zu machen, welche ist

$$\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz} = \frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2} - \frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2} = \left(\frac{pp+1}{pp-1} + \frac{qq+1}{qq-1}\right)\left(\frac{pp+1}{pp-1} - \frac{qq+1}{qq-1}\right).$$

Hier wird nun der erste Factor $= \frac{2(ppqq-1)}{(pp-1)(qq-1)}$, der andere aber $= \frac{2(qq-pp)}{(pp-1)(qq-1)}$, wovon das Product ist $\frac{4(ppqq-1)(qq-pp)}{(pp-1)^2(qq-1)^2}$. Weil nun der Nenner schon ein Quadrat und der Zehler mit dem Quadrat 4 multiplicirt ist, so ist noch nöthig diese Formel zu einem Quadrat zu machen $(ppqq-1)(qq-pp)$, oder auch diese $(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp} - 1\right)$; welches geschieht wann genommen wird

$$pq = \frac{ff+gg}{2fg} \quad \text{und} \quad \frac{q}{p} = \frac{hh+kk}{2hk},$$

da dann ein jeder Factor besonders ein Quadrat wird. Hieraus ist nun

$$qq = \frac{ff+gg}{2fg} \cdot \frac{hh+kk}{2hk};$$

folglich müßen diese zwey Brüche mit einander multiplicirt ein Quadrat ausmachen, und allso auch wann dieselben mit $4ffgg \cdot hhkk$ multiplicirt werden, das ist $fg(ff+gg)hk(hh+kk)$; welche Formel derjenigen, so im vorigen gefunden worden, vollkommen ähnlich wird, wann man setzt

$$f = a + b, \qquad g = a - b, \qquad h = c + d \quad \text{und} \quad k = c - d;$$

dann da kommt $2(a^4 - b^4) \cdot 2(c^4 - d^4) = 4(a^4 - b^4)(c^4 - d^4)$, welches, wie wir gesehen haben geschieht, wann $aa = 9$, $bb = 4$, $cc = 81$ und $dd = 49$, oder $a = 3$, $b = 2$, $c = 9$ und $d = 7$. Hieraus wird $f = 5$, $g = 1$, $h = 16$ und $k = 2$, und dahero $pq = \frac{13}{5}$ und $\frac{q}{p} = \frac{260}{64} = \frac{65}{16}$; diese zwey Gleichungen mit einander multiplicirt geben $qq = \frac{65 \cdot 13}{16 \cdot 5} = \frac{13 \cdot 13}{16}$, folglich $q = \frac{13}{4}$, dahero wird $p = \frac{4}{5}$; dadurch bekommen wir $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1} = -\frac{41}{9}$ und $\frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1} = \frac{185}{153}$. Da nun $x = -\frac{41z}{9}$ und $y = \frac{185z}{153}$, so nehme man um gantze Zahlen zu bekommen $z = 153$, da wird $x = -697$ und $y = 185$, folglich sind die drey gesuchten Quadrat-Zahlen folgende:

$$\begin{array}{llll} xx = 485809 & \text{dann da wird} & xx - yy = 451584 = (672)^2 \\ yy = \ \ 34225 & & yy - zz = \ \ 10816 = (104)^2 \\ zz = \ \ 23409 & & xx - zz = 462400 = (680)^2 \end{array}$$

welche Quadrate viel kleiner sind, als wann wir von den in der vorigen Frage gefundenen drey Zahlen x, y und z die Quadrate hätten nehmen wollen.

237.

Man wird hier einwenden, daß diese Auflösung durch ein bloßes Probiren gefunden worden, indem uns dazu die obige Tabelle behülflich gewesen. Wir haben uns aber dieses Mittels nur bedienet, um die kleinste Auflösung zu finden; wollte man aber darauf nicht sehen, so können durch Hülfe der oben gegebenen Regeln unendlich viele Auflösungen gegeben werden. Da es nemlich bey der letztern Frage darauf ankommt, daß dieses Product

$$(ppqq - 1)\left(\frac{qq}{pp} - 1\right)$$

zu einem Quadrat gemacht werde, weil alsdann sein wird

$$\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1} \quad \text{und} \quad \frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1},$$

60*

so setze man $\frac{q}{p} = m$ oder $q = mp$, da dann unsere Formel seyn wird $(mmp^4 - 1)(mm - 1)$, welche offenbar ein Quadrat wird wann $p = 1$; und dieser Werth wird uns auf andere führen, wann wir setzen $p = 1 + s$, alsdann aber muß diese Formel ein Quadrat seyn

$$(mm - 1) \cdot (mm - 1 + 4mms + 6mmss + 4mms^3 + mms^4)$$

und also auch wann dieselbe durch das Quadrat $(mm - 1)^2$ dividirt wird, da dann herauskommt

$$1 + \frac{4mms}{mm-1} + \frac{6mmss}{mm-1} + \frac{4mms^3}{mm-1} + \frac{mms^4}{mm-1}.$$

Man setze hier der Kürtze halber $\frac{mm}{mm-1} = a$, also daß diese Formel $1 + 4as + 6ass + 4as^3 + as^4$ ein Quadrat werden soll. Es sey die Wurzel davon $1 + fs + gss$ deren Quadrat ist $1 + 2fs + 2gss + ffss + 2fgs^3 + ggs^4$, und man bestimme f und g also, daß die drey ersten Glieder wegfallen, welches geschieht wann $4a = 2f$ oder $f = 2a$, und $6a = 2g + ff$, folglich $g = \frac{6a - ff}{2} = 3a - 2aa$, so geben die zwey letzten Glieder diese Gleichung $4a + as = 2fg + ggs$, woraus gefunden wird

$$s = \frac{4a - 2fg}{gg - a} = \frac{4a - 12aa + 8a^3}{4a^4 - 12a^3 + 9aa - a}, \quad \text{das ist} \quad s = \frac{4 - 12a + 8aa}{4a^3 - 12aa + 9a - 1},$$

welcher Bruch durch $a - 1$ abgekürtzt giebt $\frac{4(2a-1)}{4aa - 8a + 1}$. Dieser Werth giebt uns schon unendlich viel Auflösungen weil die Zahl m, daraus hernach $a = \frac{mm}{mm-1}$ entstanden, nach Belieben genommen werden kann, welches durch einige Exempel zu erläutern nöthig ist.

I. Es sey $m = 2$, so wird $a = \frac{4}{3}$ und dahero $s = 4 \cdot \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{23}{9}} = -\frac{60}{23}$ und hieraus $p = -\frac{37}{23}$, folglich $q = -\frac{74}{23}$; endlich $\frac{x}{z} = \frac{949}{420}$ und $\frac{y}{z} = \frac{6005}{4947}$.

II. Es sey $m = \frac{3}{2}$, so wird $a = \frac{9}{5}$ und $s = 4 \cdot \frac{\frac{13}{5}}{-\frac{11}{25}} = -\frac{260}{11}$, dahero $p = -\frac{249}{11}$ und $q = -\frac{747}{22}$, woraus die Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ gefunden werden können.

Ein besonderer Fall verdient noch bemerckt zu werden, wann a ein Quadrat ist, wie geschieht wann $m = \frac{5}{3}$, dann da wird $a = \frac{25}{16}$. Man setze wieder der Kürtze halben $a = bb$, also daß unsere Formel seyn wird $1 + 4bbs + 6bbss + 4bbs^3 + bbs^4$; davon sey die Wurzel $1 + 2bbs + bss$, deren

Quadrat ist $1+4bbs+2bss+4b^4ss+4b^3s^3+bbs^4$, wo sich die zwey ersten und die letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch ss dividirt geben $6bb+4bbs=2b+4b^4+4b^3s$, daraus

$$s=\frac{6bb-2b-4b^4}{4b^3-4bb}=\frac{3b-1-2b^3}{2bb-2b};$$

welcher Bruch noch durch $b-1$ abgekürtzt werden kann, da dann kommt

$$s=\frac{1-2b-2bb}{2b} \quad \text{und} \quad p=\frac{1-2bb}{2b}.$$

Man hätte die Wurzel dieser obigen Formel auch setzen können $1+2bs+bss$, davon das Quadrat ist $1+4bs+2bss+4bbss+4bbs^3+bbs^4$, wo sich die ersten und zwey letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch s dividirt geben $4bb+6bbs=4b+2bs+4bbs$. Da nun $bb=\frac{25}{16}$ und $b=\frac{5}{4}$, so bekäme man daraus $s=-2$ und $p=-1$, folglich $pp-1=0$: woraus nichts gefunden wird, weil $z=0$ würde.

Im vorigen Fall aber, da $p=\frac{1-2bb}{2b}$, wann $m=\frac{5}{3}$ und dahero $a=\frac{25}{16}=bb$, folglich $b=\frac{5}{4}$, so kommt $p=-\frac{17}{20}$ und $q=mp=-\frac{17}{12}$, folglich $\frac{x}{z}=\frac{689}{111}$ und $\frac{y}{z}=\frac{433}{145}$.

238.

XVII. Frage: Man verlangt drey Quadrat-Zahlen xx, yy und zz, so daß die Summe von je zweyen wieder ein Quadrat ausmache?

Da nun diese drey Formeln $xx+yy$, $xx+zz$ und $yy+zz$ zu Quadrate gemacht werden sollen, so theile man dieselben durch zz um die drey folgenden zu erhalten

$$\text{I.)}\ \frac{xx}{zz}+\frac{yy}{zz}=\square; \quad \text{II.)}\ \frac{xx}{zz}+1=\square; \quad \text{III.)}\ \frac{yy}{zz}+1=\square.$$

Da dann den zwey letzteren ein Genüge geschieht, wann

$$\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p} \quad \text{und} \quad \frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q},$$

hieraus wird die erste Formel $\frac{(pp-1)^2}{4pp}+\frac{(qq-1)^2}{4qq}$, welche also auch mit 4 multiplicirt ein Quadrat werden muß, das ist $\frac{(pp-1)^2}{pp}+\frac{(qq-1)^2}{qq}$; oder auch mit $ppqq$ multiplicirt $qq(pp-1)^2+pp(qq-1)^2=\square$, welches nicht wohl geschehen kann ohne einen Fall zu wißen, da dieselbe ein Quadrat wird; allein ein solcher Fall läßt sich nicht wohl errathen, dahero man zu andern Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen muß, wovon wir einige anführen wollen.

I. Da sich die Formel also ausdrücken läßt

$$qq(p+1)^2(p-1)^2+pp(q+1)^2(q-1)^2=\square$$

so mache man, daß sich dieselbe durch das Quadrat $(p+1)^2$ theilen laße; welches geschieht wann man nimmt $q-1=p+1$ oder $q=p+2$, da dann seyn wird $q+1=p+3$, woher unsere Formel wird

$$(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2+pp(p+3)^2(p+1)^2=\square,$$

welche durch $(p+1)^2$ dividirt ein Quadrat seyn **muß**, nemlich

$$(p+2)^2(p-1)^2+pp(p+3)^2,$$

so in diese Form aufgelößt wird $2p^4+8p^3+6pp-4p+4$. Weil nun hier das letzte Glied ein Quadrat ist, so setze man die Wurzel $2+fp+gpp$ oder $gpp+fp+2$, davon das Quadrat ist

$$ggp^4+2fgp^3+4gpp+ffpp+4fp+4$$

wo man f und g so bestimmen muß, daß die drey letzten Glieder wegfallen, welches geschieht wann $-4=4f$, oder $f=-1$ und $6=4g+1$, oder $g=\frac{5}{4}$, da dann die ersten Glieder durch p^3 dividirt geben $2p+8=ggp+2fg=\frac{25}{16}p-\frac{5}{2}$, woraus gefunden wird $p=-24$ und $q=-22$; daher wir erhalten $\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}=-\frac{575}{48}$ oder $x=-\frac{575}{48}z$, und $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}=-\frac{483}{44}$ oder $y=-\frac{483}{44}z$.

Man nehme nun $z=16\cdot3\cdot11$, so wird $x=575\cdot11$ und $y=483\cdot12$; dahero sind die Wurzeln von den drey gesuchten Quadraten folgende:

$$x=6325=11\cdot23\cdot25,\quad y=5796=12\cdot21\cdot23,\quad z=528=3\cdot11\cdot16,$$

dann hieraus wird

$$xx+yy=23^2(275^2+252^2)=23^2\cdot373^2$$
$$xx+zz=11^2(575^2+\ 48^2)=11^2\cdot577^2$$
$$yy+zz=12^2(483^2+\ 44^2)=12^2\cdot485^2.$$

II. Man kann noch auf unendlich viel Arten machen, daß unsere Formel durch ein Quadrat theilbar wird; man setze z. E. $(q+1)^2 = 4(p+1)^2$ oder $q+1 = 2(p+1)$, das ist $q = 2p+1$ und $q-1 = 2p$, woraus unsere Formel wird $(2p+1)^2(p+1)^2(p-1)^2 + pp\cdot 4\cdot(p+1)^2(4pp) = \square$, welche durch $(p+1)^2$ getheilt, giebt $(2p+1)^2(p-1)^2 + 16p^4 = \square$ oder $20p^4 - 4p^3 - 3pp + 2p + 1 = \square$, woraus aber nichts gefunden werden kann.

III. Man setze dahero $(q-1)^2 = 4(p+1)^2$, oder $q-1 = 2(p+1)$, so wird $q = 2p+3$ und $q+1 = 2p+4$ oder $q+1 = 2(p+2)$; woher unsere Formel durch $(p+1)^2$ getheilt, seyn wird:

$$(2p+3)^2(p-1)^2 + 16pp(p+2)^2,$$

das ist $9 - 6p + 53pp + 68p^3 + 20p^4$; davon sey die Wurzel $3 - p + gpp$, deren Quadrat ist $9 - 6p + 6gpp + pp - 2gp^3 + ggp^4$. Da nehme man nun um auch die dritten Glieder verschwinden zu machen $53 = 6g + 1$ oder $g = \frac{26}{3}$, so werden die übrigen Glieder durch p^3 dividirt geben $20p + 68 = ggp - 2g$ oder $\frac{256}{3} = \frac{496}{9}p$, daher $p = \frac{48}{31}$ und $q = \frac{189}{31}$, woraus wiederum eine Auflösung folget.

IV. Man setze $q - 1 = \frac{4}{3}(p-1)$, so wird

$$q = \frac{4}{3}p - \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad q+1 = \frac{4}{3}p + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2p+1),$$

dahero wird unsere Formel durch $(p-1)^2$ dividirt, seyn

$$\frac{(4p-1)^2}{9}(p+1)^2 + \frac{64}{81}pp(2p+1)^2,$$

welche mit 81 multiplicirt, wird

$$9(4p-1)^2(p+1)^2 + 64pp(2p+1)^2 = 400p^4 + 472p^3 + 73pp - 54p + 9,$$

wo so wohl das erste als letzte Glied Quadrate sind. Man setze demnach die Wurzel $20pp - 9p + 3$, davon das Quadrat

$$400p^4 - 360p^3 + 201pp - 54p + 9$$

und daher erhält man $472p + 73 = -360p + 201$, dahero

$$p = \frac{2}{13} \quad \text{und} \quad q = \frac{8}{39} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{39}.$$

Man kann auch für die obige Wurzel setzen $20pp + 9p - 3$, davon das Quadrat

$$400p^4 + 360p^3 - 120pp + 81pp - 54p + 9,$$

mit unserer Formel verglichen giebt $472p + 73 = 360p - 39$, und daraus $p = -1$, welcher Werth aber zu nichts nützet.

V. Man kann auch machen daß sich unsere Formel so gar durch beyde Quadrate $(p+1)^2$ und $(p-1)^2$ zugleich theilen läßt. Man setze zu diesem Ende $q = \frac{pt+1}{p+t}$, da wird

$$q + 1 = \frac{pt + p + t + 1}{p + t} = \frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$$

und

$$q - 1 = \frac{pt - p - t + 1}{p + t} = \frac{(p-1)(t-1)}{p+t},$$

hieraus wird nun unsere Formel durch $(p+1)^2(p-1)^2$ dividirt

$$= \frac{(pt+1)^2}{(p+t)^2} + pp\frac{(t+1)^2(t-1)^2}{(p+t)^4},$$

welche mit dem Quadrat $(p+t)^4$ multiplicirt noch ein Quadrat seyn muß, nemlich

$$(pt+1)^2(p+t)^2 + pp(t+1)^2(t-1)^2 \text{ oder}$$

$$ttp^4 + 2t(tt+1)p^3 + 2ttpp + (tt+1)^2pp + (tt-1)^2pp + 2t(tt+1)p + tt,$$

wo so wohl das erste als letzte Glied Quadrate sind. Man setze demnach die Wurzel $tpp + (tt+1)p - t$, davon das Quadrat

$$ttp^4 + 2t(tt+1)p^3 - 2ttpp + (tt+1)^2pp - 2t(tt+1)p + tt$$

mit unserer Formel verglichen giebt:

$$2ttp + (tt+1)^2p + (tt-1)^2p + 2t(tt+1)$$
$$= -2ttp + (tt+1)^2p - 2t(tt+1),$$

oder $4ttp + (tt-1)^2p + 4t(tt+1) = 0$, oder $(tt+1)^2p + 4t(tt+1) = 0$, das ist $tt + 1 = -\frac{4t}{p}$, woraus wir erhalten $p = \frac{-4t}{tt+1}$; hieraus wird

$$pt + 1 = \frac{-3tt+1}{tt+1} \quad \text{und} \quad p + t = \frac{t^3 - 3t}{tt+1}, \quad \text{folglich} \quad q = \frac{-3tt+1}{t^3 - 3t},$$

wo t nach Belieben angenommen werden kann.

Es sey z. E. $t = 2$ so wird $p = -\frac{8}{5}$ und $q = -\frac{11}{2}$, woraus wir finden

$$\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p} = -\frac{39}{80} \text{ und } \frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q} = -\frac{117}{44}$$

oder $x = \frac{3 \cdot 13}{4 \cdot 4 \cdot 5} z$ und $y = \frac{9 \cdot 13}{4 \cdot 11} z$. Man nehme nun $z = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11$, so wird $x = 3 \cdot 13 \cdot 11$ und $y = 4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13$: also sind die Wurzeln der drey gesuchten Quadraten

$$x = 3 \cdot 11 \cdot 13 = 429; \quad y = 4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 = 2340 \quad \text{und} \quad z = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11 = 880.$$

Welche noch kleiner sind als die oben gefundenen.

Aus diesen aber wird

$$xx + yy = 3^2 \cdot 13^2(121 + 3600) = 3^2 \cdot 13^2 \cdot 61^2;$$
$$xx + zz = 11^2 \cdot (1521 + 6400) = 11^2 \cdot 89^2;$$
$$yy + zz = 20^2 \cdot (13689 + 1936) = 20^2 \cdot 125^2;$$

VI. Zuletzt bemercken wir noch bey dieser Frage, daß aus einer jeglichen Auflösung ganz leicht noch eine andere gefunden werden kann: dann wann diese Werthe gefunden worden $x = a$, $y = b$ und $z = c$; also daß $aa + bb = \square$, $aa + cc = \square$ und $bb + cc = \square$, so werden auch die folgenden Werthe ein Genüge leisten, $x = ab$, $y = bc$ und $z = ac$, dann da wird

$$xx + yy = aabb + bbcc = bb(aa + cc) = \square$$
$$xx + zz = aabb + aacc = aa(bb + cc) = \square$$
$$yy + zz = aacc + bbcc = cc(aa + bb) = \square.$$

Da wir nun eben gefunden

$$x = a = 3 \cdot 11 \cdot 13; \quad y = b = 4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \quad \text{und} \quad z = c = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11,$$

so erhalten wir daraus nach dieser Auflösung:

$$x = ab = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 \,.\, 11 \cdot 13 \cdot 13$$
$$y = bc = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13$$
$$z = ac = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13$$

welche sich alle drey durch $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$ theilen laßen, und also auf folgende Formel gebracht werden

$$x = 9 \cdot 13, \quad y = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \quad \text{und} \quad z = 4 \cdot 11,$$

das ist $\quad x = 117, \quad y = 240 \quad$ und $\quad z = 44,$

welche noch kleiner sind als die vorigen; dahero wird aber:

$$xx + yy = 71289 = 267^2$$
$$xx + zz = 15625 = 125^2$$
$$yy + zz = 59536 = 244^2.$$

239.

XVIII. Frage: Man verlangt zwey Zahlen x und y, so daß wann man die eine zum Quadrat der andern addirt ein Quadrat herauskomme, also daß diese zwey Formeln $xx + y$ und $yy + x$ Quadrate seyn sollen?

Wollte man so gleich für die erstere setzen $xx + y = pp$ und daraus herleiten $y = pp - xx$, so würde die andere Formel $p^4 - 2ppxx + x^4 + x = \square$ wovon die Auflösung nicht leicht in die Augen fällt.

Man setze aber zu gleich für beyde Formeln

$$xx + y = (p - x)^2 = pp - 2px + xx \quad \text{und} \quad yy + x = (q - y)^2 = qq - 2qy + yy,$$

woraus wir dann diese zwey Gleichungen erhalten

$$\text{I.)}\ y + 2px = pp \quad \text{und} \quad \text{II.)}\ x + 2qy = qq,$$

aus welchen x und y leicht gefunden werden können. Man findet nemlich

$$x = \frac{2qpp - qq}{4pq - 1} \quad \text{und} \quad y = \frac{2pqq - pp}{4pq - 1};$$

wo man p und q nach Belieben annehmen kann.

Man setze z. E. $p = 2$ und $q = 3$, so bekommt man diese zwey gesuchte Zahlen $x = \frac{15}{23}$ und $y = \frac{32}{23}$, dann daher wird

$$xx + y = \frac{225}{529} + \frac{32}{23} = \frac{961}{529} = \left(\frac{31}{23}\right)^2 \text{ und } yy + x = \frac{1024}{529} + \frac{15}{23} = \frac{1369}{529} = \left(\frac{37}{23}\right)^2.$$

Man nehme ferner $p = 1$ und $q = 3$, so wird $x = -\frac{3}{11}$ und $y = \frac{17}{11}$; weil aber eine Zahl negativ ist, so mögte man diese Auflösung nicht gelten laßen.

Man setze $p=1$ und $q=\frac{3}{2}$, so wird $x=\frac{3}{20}$ und $y=\frac{7}{10}$, dann da wird

$$xx+y=\frac{9}{400}+\frac{7}{10}=\frac{289}{400}=\left(\frac{17}{20}\right)^2 \quad \text{und} \quad yy+x=\frac{49}{100}+\frac{3}{20}=\frac{64}{100}=\left(\frac{8}{10}\right)^2.$$

240.

XIX. Frage: Zwey Zahlen zu finden deren Summe ein Quadrat und die Summe ihrer Quadraten ein Biquadrat sey.

Diese Zahlen seyen x und y und weil $xx+yy$ ein Biquadrat seyn muß, so mache man dasselbe erstlich zu einem Quadrat, welches geschieht wann $x=pp-qq$ und $y=2pq$, da dann wird $xx+yy=(pp+qq)^2$. Damit nun dieses ein Biquadrat werde, so muß $pp+qq$ ein Quadrat seyn, dahero setze man ferner $p=rr-ss$ und $q=2rs$, so wird $pp+qq=(rr+ss)^2$; folglich

$$xx+yy=(rr+ss)^4$$

und also ein Biquadrat; alsdann aber wird $x=r^4-6rrss+s^4$ und $y=4r^3s-4rs^3$. Allso ist noch übrig, daß diese Formel $x+y=r^4+4r^3s-6rrss-4rs^3+s^4$ ein Quadrat werde, man setze davon die Wurzel $rr+2rs+ss$, und also unsere Formel gleich diesem Quadrat $r^4+4r^3s+6rrss+4rs^3+s^4$, wo sich die zwey ersten und letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch rss dividirt geben $6r+4s=-6r-4s$ oder $12r+8s=0$: also $s=-\frac{12r}{8}=-\frac{3}{2}r$; oder man kann die Wurzel auch setzen $rr-2rs+ss$, damit die vierten Glieder wegfallen; da nun das Quadrat hievon ist $r^4-4r^3s+6rrss-4rs^3+s^4$, so geben die übrigen Glieder durch rrs dividirt $4r-6s=-4r+6s$, oder $8r=12s$, folglich $r=\frac{3}{2}s$; wann nun $r=3$ und $s=2$ so würde $x=-119$ negativ.

Laßt uns ferner setzen $r=\frac{3}{2}s+t$, so wird für unsere Formel

$$rr=\frac{9}{4}ss+3st+tt,\quad r^3=\frac{27}{8}s^3+\frac{27}{4}sst+\frac{9}{2}stt+t^3$$

folglich

$$\begin{aligned}
r^4 &= \tfrac{81}{16}s^4+\tfrac{27}{2}s^3t+\tfrac{27}{2}sstt+6st^3+t^4\\
+4r^3s &= \tfrac{27}{2}s^4+27s^3t+18sstt+4st^3\\
-6rrss &= -\tfrac{27}{2}s^4-18s^3t-6sstt\\
-4rs^3 &= -6s^4-4s^3t\\
+s^4 &= +s^4
\end{aligned}$$

allso unsere Formel $\quad \frac{1}{16}s^4+\frac{37}{2}s^3t+\frac{51}{2}sstt+10st^3+t^4$

welche ein Quadrat seyn muß, und also auch wann sie mit 16 multiplicirt wird; da bekommt man diese $s^4 + 296s^3t + 408sstt + 160st^3 + 16t^4$; hievon setze man die Wurzel $ss + 148st - 4tt$, davon das Quadrat ist

$$s^4 + 296s^3t + 21896sstt - 1184st^3 + 16t^4.$$

Hier heben sich die zwey ersten und letzten Glieder auf, die übrigen aber durch stt dividirt geben $21896s - 1184t = 408s + 160t$ und also

$$\frac{s}{t} = \frac{1344}{21488} = \frac{336}{5372} = \frac{84}{1343}.$$

Also nehme man $s = 84$ und $t = 1343$ folglich $r = 1469$; und aus diesen Zahlen $r = 1469$ und $s = 84$ finden wir

$$x = r^4 - 6rrss + s^4 = 4565486027761 \quad \text{und} \quad y = 1061652293520.$$

CAPITEL 15

AUFLÖSUNG SOLCHER FRAGEN WORZU CUBI ERFORDERT WERDEN

241.

In dem vorigen Capitel sind solche Fragen vorgekommen, wo gewiße Formeln zu Quadraten gemacht werden mußten, da wir dann Gelegenheit gehabt haben, verschiedene Kunstgriffe zu erklären, wodurch die oben gegebenen Regeln zur Ausübung gebracht werden können. Nun ist noch übrig solche Fragen zu betrachten, wo gewiße Formeln zu Cubis gemacht werden sollen, dazu auch schon im vorigen Capitel die Regeln gegeben worden, welche aber jetzt durch die Auflösung der folgenden Fragen in ein größeres Licht gesetzt werden.

242.

I. Frage: Man verlangt zwey Cubos x^3 und y^3 deren Summe wiederum ein Cubus seyn soll?

Da also $x^3 + y^3$ ein Cubus werden soll, so muß auch diese Formel durch den Cubus y^3 dividirt noch ein Cubus seyn, also $\frac{x^3}{y^3} + 1 = \text{Cubo}$. Man setze $\frac{x}{y} = z - 1$ so bekommen wir $z^3 - 3zz + 3z$, welche ein Cubus seyn soll; wollte man