da dann offenbahr wird $axx + cyy = (app + cqq)^5$. Weil nun die fünfte Potestät von $p\sqrt{a} + q\sqrt{-c}$ ist

$$aap^5\sqrt{a} + 5aap^4q\sqrt{-c} - 10acp^3qq\sqrt{a} - 10acppq^3\sqrt{-c} + 5ccpq^4\sqrt{a} + ccq^5\sqrt{-c},$$

woraus sogleich geschlossen wird

$$x = aap^5 - 10acp^3qq + 5ccpq^4 \quad \text{und} \quad y = 5aap^4q - 10acppq^3 + ccq^5.$$

Verlangt man allso eine Summ von zwey Quadraten $xx + yy$, die zugleich eine fünfte Potestät sey, so ist $a = 1$ und $c = 1$; folglich

$$x = p^5 - 10p^3qq + 5pq^4 \quad \text{und} \quad y = 5p^4q - 10ppq^3 + q^5.$$

Nimmt man nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 38$ und $y = 41$, und

$$xx + yy = 3125 = 5^5.$$

CAPITEL 13

VON EINIGEN FORMELN DIESER ART $ax^4 + by^4$ WELCHE SICH NICHT ZU EINEM QUADRAT MACHEN LASSEN

202.

Man hat sich alle Mühe gegeben zwey Biquadrate zu finden, deren Summ oder Differenz eine Quadrat-Zahl würde; allein alle Mühe war vergebens, und endlich fand man so gar einen Beweis, daß weder diese Formel $x^4 + y^4$ noch diese $x^4 - y^4$ jemals ein Quadrat werden könne, nur zwey Fälle ausgenommen, wo nemlich bey der erstern entweder $x = 0$ oder $y = 0$, bey der andern aber wo entweder $y = 0$ oder $y = x$, und in welchen Fällen die Sache offenbahr vor Augen liegt. Daß aber in allen übrigen die Sache unmöglich seyn soll, ist um so viel mehr merckwürdig, weil wann nur von schlechten Quadraten die Rede ist, unendlich viel Auflösungen statt finden.

203.

Um diesen Beweis gehörig vorzutragen, ist vor allen Dingen zu bemercken, daß die beyden Zahlen x und y als untheilbahr unter sich angesehen werden können; dann sollten dieselben einen gemeinen Theiler z. E. d haben, also daß man setzen könnte $x=dp$ und $y=dq$, so würden unsere Formeln $d^4p^4+d^4q^4$ und $d^4p^4-d^4q^4$, welche wann sie Quadrate wären, auch durch das Quadrat d^4 dividirt, Quadrate bleiben müßten, also daß auch diese Formeln p^4+q^4 und p^4-q^4 Quadrate wären, wo nun die Zahlen p und q keinen weitern gemeinen Theiler haben; es ist demnach genung zu beweisen, daß diese Formeln in dem Fall da x und y unter sich untheilbahr sind, keine Quadrate werden können, und alsdann erstreckt sich der Beweis von selbsten auf alle Fälle, da auch x und y gemeinschaftliche Theiler haben.

204.

Wir wollen demnach von der Summ zweyer Biquadraten nemlich dieser Formel x^4+y^4 den Anfang machen, und wo wir x und y als unter sich untheilbahre Zahlen ansehen können. Um nun zu zeigen daß x^4+y^4 außer den obgemeldten Fällen kein Quadrat seyn könne, so wird der Beweis folgendergestalt geführet.

Wann jemand den Satz läugnen wollte, so müßte er behaupten daß solche Werthe für x und y möglich wären, wodurch x^4+y^4 ein Quadrat würde, dieselben möchten auch so groß seyn als sie wollten, weil in kleinen gewis keine vorhanden sind.

Man kann aber deutlich zeigen, daß wann auch in den größten Zahlen solche Werthe für x und y vorhanden wären, aus denselben auch in kleinern Zahlen eben dergleichen Werthe geschlossen werden könnten, und aus diesen ferner in noch kleinern u. s. f. Da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Werthe vorhanden sind, außer den zwey gemeldten welche aber zu keinen andern führen, so kann man sicher schließen, daß auch in größern, ja so gar den allergrößten Zahlen, keine solche Werthe für x und y vorhanden seyn können. Und auf eben solche Art wird auch der Satz von der Differenz zweyer Biquadraten x^4-y^4 bewiesen, wie wir so gleich zeigen wollen.

205.

Um erstlich zu zeigen daß x^4+y^4 kein Quadrat seyn könne außer den beyden Fällen die für sich klar sind, so sind folgende Sätze wohl zu bemercken.

I. Nehmen wir an daß die Zahlen x und y untheilbahr unter sich sind oder keinen gemeinen Theiler haben; so sind sie entweder beyde ungerad, oder die eine ist gerad und die andere ungerad.

II. Beyde aber können nicht ungerad seyn, weil die Summ von zwey ungeraden Quadraten niemals ein Quadrat seyn kann: dann ein ungerades Quadrat ist allezeit in der Form $4n+1$ enthalten, und also würde die Summ zweyer ungeraden Quadraten diese Form $4n+2$ haben, welche sich durch 2 nicht aber durch 4 theilen läßt, und also kein Quadrat seyn kann. Dieses aber gilt auch von zwey ungeraden Biquadraten.

III. Wann demnach x^4+y^4 ein Quadrat wäre, so müßte das eine gerad, das andere aber ungerad seyn. Wir haben aber oben gesehen, daß wann die Summ zweyer Quadraten ein Quadrat seyn soll, die Wurzel des einen durch $pp-qq$, des andern aber durch $2pq$ ausgedrückt werde; woraus folget daß seyn müßte $xx=pp-qq$ und $yy=2pq$ und da würde $x^4+y^4=(pp+qq)^2$.

IV. Hier also würde y gerad, x aber ungerad seyn: da nun $xx=pp-qq$, so muß auch von den Zahlen p und q die eine gerad, die andere aber ungerad seyn; die erstere p aber kann nicht gerad seyn, weil sonsten $pp-qq$ als eine Zahl von dieser Form $4n-1$ oder $4n+3$, niemals ein Quadrat werden kann. Folglich müßte p ungerad q aber gerad seyn, wo sich von selbsten versteht daß dieselben untheilbahr unter sich seyn müßen.

V. Da nun $pp-qq$ ein Quadrat, nemlich dem xx gleich seyn soll, so geschieht dieses wie wir oben gesehen, wann $p=rr+ss$ und $q=2rs$: dann da wird $xx=(rr-ss)^2$, und also $x=rr-ss$.

VI. Allein yy muß auch ein Quadrat seyn; da wir nun haben $yy=2pq$, so wird jetzt $yy=4rs(rr+ss)$, welche Formel also ein Quadrat seyn muß: folglich muß auch $rs(rr+ss)$ ein Quadrat seyn, wo r und s unter sich untheilbahre Zahlen sind, allso daß auch die hier befindlichen drey Factores, r, s und $rr+ss$, keinen gemeinen Theiler unter sich haben können.

VII. Wann aber ein Product aus mehr Factoren, die unter sich untheilbahr sind, ein Quadrat seyn soll, so muß ein jeder Factor für sich ein Quadrat seyn, also setze man $r=tt$ und $s=uu$: so muß auch t^4+u^4 ein Quadrat seyn. Wann demnach x^4+y^4 ein Quadrat wäre, so würde auch hier t^4+u^4, das ist ebenfals eine Summ von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn. Wobey zu mercken daß weil hier $xx=(t^4-u^4)^2$ und $yy=4ttuu(t^4+u^4)$, die Zahlen t und u offenbahr weit kleiner seyn würden als x und y, indem x und y so gar durch die vierte Potestäten von t und u bestimmt werden und also unstreitig weit größer seyn müßen.[1])

VIII. Wann dahero zwey Biquadrate als x^4 und y^4 auch in den größten Zahlen vorhanden seyn sollten, deren Summ ein Quadrat wäre, so könnte man daraus eine Summ von zwey weit kleineren Biquadraten herleiten, welche ebenfals ein Quadrat wäre; und aus diesen könnte nachmahlen noch eine kleinere dergleichen Summe geschlossen werden und so weiter, bis man endlich auf sehr kleine Zahlen käme: da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Summ möglich ist, so folgt daraus offenbahr daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht gebe.

IX. Man könnte hier zwar einwenden daß es in den kleinen Zahlen würcklich solche gebe wie schon anfänglich bemerckt worden, nemlich da das eine Biquadrat Nulle wird; allein auf diesen Fall kommt man gewis nicht wann man solchergestalt von den größten Zahlen immer zu kleinern zurückgeht. Dann wäre bey der kleineren Summ t^4+u^4 entweder $t=0$ oder $u=0$, so würde auch bey der größern Summ nothwendig $yy=0$ seyn; welcher Fall hier in keine Betrachtung kommt.[2])

206.

Nun kommen wir zu dem andern Hauptsatz, daß auch die Differenz zwischen zwey Biquadraten als x^4-y^4 niemals ein Quadrat werden könne, außer den Fällen $y=0$ und $y=x$; zu dessen Beweis folgende Puncte zu mercken.

I. Sind die Zahlen x und y als untheilbahr unter sich anzusehen, und also entweder beyde ungerad oder die eine gerad und die andere ungerad. Da nun in beyden Fällen die Differenz von zweyen Quadraten wieder ein Quadrat werden kann, so müssen diese zwey Fälle besonders erwogen werden.

---

1) Aus $xx=(t^4-u^4)^2=(t^2+u^2)^2(t^2-u^2)^2$ und $(t^2-u^2)^2>1$ folgt $x^2>(t^2+u^2)^2$, also $x>t$. H. W.

2) Damit ist der FERMATSCHE Satz (siehe die Anmerkung p. 410) für $n=4$ bewiesen. EULER besaß den Beweis bereits 1738. Siehe die Abhandlung 98 (des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses) *Theorematum quorumdam arithmeticorum demonstrationes*, Comment. acad. sc. Petrop. **10** (1738), 1747, p. 125—146; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 2. H. W.

II. Es seyen also erstlich die beyden Zahlen x und y ungerad, und man setze $x = p + q$ und $y = p - q$; so muß nothwendig eine dieser Zahlen p und q ungerad die andere aber gerad seyn. Nun wird $xx - yy = 4pq$ und $xx + yy = 2pp + 2qq$, folglich unsere Formel $x^4 - y^4 = 4pq(2pp + 2qq)$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch der vierte Theil davon $pq(2pp + 2qq) = 2pq(pp + qq)$, deren Factoren unter sich untheilbahr sind: folglich muß ein jeder dieser Factoren $2p$, q und $pp + qq$ für sich ein Quadrat seyn, weil nemlich die eine Zahl p gerad, die andere q aber ungerad ist. Man setze dahero um die beyden ersten zu Quadraten zu machen $2p = 4rr$ oder $p = 2rr$, und $q = ss$, wo s ungerad seyn muß, so wird der dritte Factor $4r^4 + s^4$ auch ein Quadrat seyn müssen.

III. Da nun $s^4 + 4r^4$ eine Summ von zwey Quadraten ist, davon s^4 ungerad, $4r^4$ aber gerad ist, so setze man die Wurzel des erstern $ss = tt - uu$, wo t ungerad und u gerad ist; des letztern aber $2rr = 2tu$ oder $rr = tu$, wo t und u unter sich untheilbahr sind.

IV. Weil nun $tu = rr$ ein Quadrat seyn muß, so muß so wohl t als u ein Quadrat seyn; man setze demnach $t = mm$ und $u = nn$, wo m ungerad und n gerad ist, so wird $ss = m^4 - n^4$ also daß wieder eine Differenz von zwey Biquadraten nemlich $m^4 - n^4$ ein Quadrat seyn müßte. Es ist aber klar daß diese Zahlen weit kleiner seyn würden als x und y, weil r und s offenbahr kleiner sind als x und y, und hinwiederum m und n kleiner als r und s; wann also die Sache in den größten Zahlen möglich und $x^4 - y^4$ ein Quadrat wäre, so würde dieselbe in weit kleinern Zahlen auch noch möglich seyn, und so immer fort bis man endlich auf die kleinsten Zahlen käme, wo die Sache möglich ist.

V. Die kleinsten Zahlen aber wo dieses möglich ist, sind wann das eine Biquadrat gleich 0 oder dem andern gleich ist: wäre das erstere so müßte seyn $n = 0$, folglich $u = 0$, ferner $r = 0$ und $p = 0$ und $x^4 - y^4 = 0$, oder $x^4 = y^4$; von einem solchen Fall ist aber hier nicht die Rede. Wäre aber $n = m$, so würde $t = u$, weiter $s = 0$, $q = 0$ und endlich auch $x = y$, welcher Fall hier nicht statt findet.

207.

Man könnte hier einwenden, daß da m ungerad und n gerad ist, die letztere Differenz der erstern nicht mehr ähnlich sey, und man also daraus nicht weiter auf kleinere Zahlen den Schluß machen könnte. Es ist aber genug daß man von der erstern Differenz auf die andere gekommen, und wir werden anjetzo zeigen daß auch x^4-y^4 kein Quadrat seyn könne, wann das eine Biquadrat gerad und das andere ungerad ist.

I. Wäre das erstere x^4 gerad und y^4 ungerad, so wäre die Sach an sich nicht möglich, weil eine Zahl von der Form $4n+3$ herauskäme die kein Quadrat seyn kann. Es sey demnach x ungerad und y gerad, so muß seyn $xx=pp+qq$ und $y=2pq$, dann so wird

$$x^4-y^4=p^4-2ppqq+q^4=(pp-qq)^2,$$

wo von p und q das eine gerad das andere aber ungerad seyn muß.

II. Da nun $pp+qq=xx$ ein Quadrat seyn muß, so wird $p=rr-ss$ und $q=2rs$; folglich $x=rr+ss$. Hieraus aber wird $yy=2(rr-ss)\cdot 2rs$ oder $yy=4rs(rr-ss)$, welches ein Quadrat sein muß, und also auch der vierte Theil davon nemlich $rs(rr-ss)$, wovon die Factoren unter sich untheilbahr sind.

III. Man setze demnach $r=tt$ und $s=uu$, so wird der dritte Factor $rr-ss=t^4-u^4$, welcher ebenfals ein Quadrat seyn muß; da nun derselbe auch eine Differenz von zwey Biquadraten ist welche viel kleiner sind als die ersten, so erhält hierdurch der vorige Beweis seine völlige Stärcke, also daß wann auch in den größten Zahlen die Differenz zweyer Biquadraten ein Quadrat wäre, daraus immer kleinere dergleichen Differenzen gefunden werden könnten, ohne gleichwohl auf die zwey offenbahre Fälle zu kommen: dahero gewis auch in den größten Zahlen solches nicht möglich ist.

208.

Der erste Theil dieses Beweises da die Zahlen x und y beyde ungerad genommen werden, kann folgender Gestalt abgekürtzet werden. Wann x^4-y^4 ein Quadrat wäre, so müßte seyn $xx=pp+qq$ und $yy=pp-qq$, wo von den Buchstaben p und q der eine gerad der andere aber ungerad wäre: alsdann aber würde $xxyy=p^4-q^4$, folglich müßte p^4-q^4 auch ein Quadrat seyn, welches eine Differenz von zwey solchen Biquadraten ist, davon das eine gerad das andere aber ungerad ist: daß dieses aber unmöglich sey, ist in dem zweyten Theil des Beweises gezeigt worden.

209.

Wir haben also diese zwey Hauptsätze bewiesen, daß weder die Summ noch die Differenz zweyer Biquadraten jemals eine Quadrat-Zahl werden könne, außer einigen wenigen offenbahren Fällen.

Wann demnach auch andere Formeln welche zu Quadraten gemacht werden sollen, so beschaffen sind, daß entweder eine Summ oder eine Differenz von zweyen Biquadraten ein Quadrat werden müßte, so sind dieselben Formeln ebenfalls nicht möglich. Dieses findet nun statt in den folgenden Formeln, welche wir hier anführen wollen.

I. Ist es nicht möglich daß diese Formel $x^4 + 4y^4$ ein Quadrat werde: dann weil diese Formel eine Summ von zwey Quadraten ist, so müßte seyn $xx = pp - qq$ und $2yy = 2pq$ oder $yy = pq$; da nun p und q untheilbahr unter sich sind, so müßte ein jedes ein Quadrat seyn. Setzt man dahero $p = rr$ und $q = ss$, so wird $xx = r^4 - s^4$: also müßte eine Differenz von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn, welches nicht möglich ist.

II. Ist es auch nicht möglich daß diese Formel $x^4 - 4y^4$ ein Quadrat werde: dann da müßte seyn $xx = pp + qq$ und $2yy = 2pq$, weil alsdann heraus käme $x^4 - 4y^4 = (pp - qq)^2$; da nun $yy = pq$, so müßte p und q jedes ein Quadrat seyn; setzt man nun $p = rr$ und $q = ss$, so wird $xx = r^4 + s^4$; folglich müßte eine Summ von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn, welches nicht möglich ist.

III. Es ist auch nicht möglich, daß diese Form $4x^4 - y^4$ ein Quadrat werde, weil alsdann y nothwendig eine gerade Zahl seyn müßte. Setzt man nun $y = 2z$, so würde $4x^4 - 16z^4$ und folglich auch der vierte Theil davon $x^4 - 4z^4$ ein Quadrat seyn müßen, welches nach den vorigen Fall unmöglich ist.

IV. Es ist auch nicht möglich, daß diese Formel $2x^4 + 2y^4$ ein Quadrat werde; dann da dasselbe gerad seyn müßte, und folglich $2x^4 + 2y^4 = 4zz$ wäre, so würde seyn $x^4 + y^4 = 2zz$, und dahero

$$2zz + 2xxyy = x^4 + 2xxyy + y^4$$

und also ein Quadrat. Eben so würde seyn

$$2zz - 2xxyy = x^4 - 2xxyy + y^4$$

und also auch ein Quadrat. Da nun so wohl

$$2zz + 2xxyy \quad \text{als} \quad 2zz - 2xxyy$$

ein Quadrat seyn würde, so müßte auch ihr Product $4z^4-4x^4y^4$, und also auch der vierte Theil davon ein Quadrat seyn. Dieser vierte Theil aber ist $z^4-x^4y^4$ und also eine Differenz von zwey Biquadraten, welches nicht möglich ist.

V. Endlich kann auch diese Formel $2x^4-2y^4$ kein Quadrat seyn; dann da beyde Zahlen x und y nicht gerad sind, weil sie sonsten einen gemeinen Theiler hätten, und auch nicht die eine gerad und die andere ungerad, weil sonsten der eine Theil durch 4 der andere aber nur durch 2, und also auch die Formel selbst nur durch 2 theilbahr seyn würde, so müßen beyde ungerad seyn. Setzt man nun $x=p+q$ und $y=p-q$, so ist die eine von den Zahlen p und q gerad die andere aber ungerad, und da $2x^4-2y^4=2(xx+yy)(xx-yy)$, so bekommt man $xx+yy=2pp+2qq=2(pp+qq)$ und $xx-yy=4pq$; allso unsere Formel $16pq(pp+qq)$, deren sechzehnte Theil, nemlich $pq(pp+qq)$, folglich auch ein Quadrat seyn müßte. Da nun die Factores unter sich untheilbar sind, so müßte ein jeder für sich ein Quadrat seyn. Setzt man nun für die beyden erstern $p=rr$ und $q=ss$, so wird der dritte r^4+s^4, welcher auch ein Quadrat seyn müßte: dieses aber ist nicht möglich.

210.

Auf eine gleiche Weise läßt sich auch beweisen, daß diese Formel x^4+2y^4 kein Quadrat seyn könne, wovon der Beweis in folgenden Sätzen besteht.

I. Kann x nicht gerad seyn, weil alsdann y ungerad seyn müßte, und die Formel sich nur durch 2 nicht aber durch 4 würde theilen laßen: dahero muß x ungerad seyn.

II. Man setze demnach die Quadrat-Wurzel unserer Formel $=xx+\frac{2pyy}{q}$, damit dieselbe ungerad werde; so wird

$$x^4+2y^4=x^4+\frac{4pxxyy}{q}+\frac{4ppy^4}{qq},$$

wo sich die x^4 aufheben, die übrigen Glieder aber durch yy dividirt und mit qq multiplicirt, geben

$$4pqxx+4ppyy=2qqyy, \quad \text{oder} \quad 4pqxx=2qqyy-4ppyy,$$

daraus wird $\frac{xx}{yy} = \frac{qq-2pp}{2pq}$; woraus folget

$$xx = qq - 2pp \quad \text{und} \quad yy = 2pq,$$

welche eben die Formeln sind die wir schon oben gegeben haben.

III. Es müßte also $qq - 2pp$ wieder ein Quadrat seyn, welches nicht anders geschehen kann, als wann $q = rr + 2ss$ und $p = 2rs$; dann da würde $xx = (rr - 2ss)^2$; hernach aber würde $4rs(rr + 2ss) = yy$, und allso müßte auch der vierte Theil $rs(rr + 2ss)$ ein Quadrat seyn, und folglich r und s jedes besonders. Setzt man nun $r = tt$ und $s = uu$, so wird der dritte Factor $rr + 2ss = t^4 + 2u^4$, welches auch ein Quadrat seyn müßte.

IV. Wäre demnach $x^4 + 2y^4$ ein Quadrat, so würde auch $t^4 + 2u^4$ ein Quadrat seyn, wo die Zahlen t und u weit kleiner wären als x und y; und solchergestalt würde man immer auf kleinere Zahlen kommen können. Da nun in kleinen Zahlen diese Formel kein Quadrat seyn kann, wie leicht zu probiren ist, so kann dieselbe auch in den größten Zahlen kein Quadrat seyn.

211.

Was hingegen diese Formel betrift $x^4 - 2y^4$, so kann von derselben nicht bewiesen werden, daß sie kein Quadrat werden könnte, und wann man auf eine ähnliche Art die Rechnung anstellt, so können so gar unendlich viel Fälle gefunden werden, da dieselbe würcklich ein Quadrat wird.

Dann wann $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat seyn soll, so ist oben gezeigt worden, daß seyn werde $xx = pp + 2qq$ und $yy = 2pq$, weil man alsdann bekommt $x^4 - 2y^4 = (pp - 2qq)^2$. Da nun auch $pp + 2qq$ ein Quadrat seyn muß, so geschieht dieses wann $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$; dann da wird $xx = (rr + 2ss)^2$. Allein hier ist wohl zu mercken, daß dieses auch geschehen würde, wann man annehme $p = 2ss - rr$ und $q = 2rs$, dahero zwey Fälle hier in Erwegung zu ziehen sind.

I. Es sey erstlich $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$, so wird $x = rr + 2ss$; und weil $yy = 2pq$, so wird nun seyn $yy = 4rs(rr - 2ss)$; und müßten also r und s Quadrate seyn. Man setze deswegen $r = tt$ und $s = uu$, so wird $yy = 4ttuu(t^4 - 2u^4)$; also

$$y = 2tu\sqrt{(t^4 - 2u^4)} \quad \text{und} \quad x = t^4 + 2u^4;$$

wann daher t^4-2u^4 ein Quadrat ist, so wird auch x^4-2y^4 ein Quadrat; ob aber gleich t und u kleinere Zahlen sind als x und y, so kann man doch wie vorher nicht schließen, daß x^4-2y^4 kein Quadrat seyn könne, deswegen weil man daher auf eine ähnliche Formel in kleinern Zahlen gelanget; dann x^4-2y^4 kann ein Quadrat seyn ohne auf diese Formel t^4-2u^4 zu kommen, weil dieses noch auf eine andere Art geschehen kann, nemlich in dem andern Fall, den wir noch zu betrachten haben.

II. Es sey also $p=2ss-rr$ und $q=2rs$, so wird zwar wie vorher $x=rr+2ss$, allein für y bekommt man $yy=2pq=4rs(2ss-rr)$. Setzt man nun $r=tt$ und $s=uu$, so bekommt man

$$yy=4ttuu(2u^4-t^4),\quad \text{folglich}\quad y=2tu\sqrt{(2u^4-t^4)}\quad \text{und}\quad x=t^4+2u^4;$$

woraus erhellet, daß unsere Formel x^4-2y^4 auch ein Quadrat werden könne, wann diese $2u^4-t^4$ ein Quadrat wird. Dieses aber geschieht offenbar, wann $t=1$ und $u=1$; und dahero bekommen wir $x=3$ und $y=2$, woraus unsere Formel x^4-2y^4 wird $81-2\cdot 16=49$.

III. Wir haben auch oben gesehen, daß $2u^4-t^4$ ein Quadrat werde, wann $u=13$ und $t=1$, weil alsdann $\sqrt{(2u^4-t^4)}=239$. Setzt man nun diese Werthe für t und u, so erhalten wir einen neuen Fall für unsere Formel, nemlich

$$x=1+2\cdot 13^4=57123\quad \text{und}\quad y=2\cdot 13\cdot 239=6214.$$

IV. So bald man aber Werthe für x und y gefunden, so kann man dieselben in den Formeln No. I. für t und u schreiben, da man dann wieder neue für x und y erhalten wird.

Weil wir nun gefunden $x=3$ und $y=2$, so laßt uns in den No. I. gegebenen Formeln setzen $t=3$ und $u=2$, da dann $\sqrt{(t^4-2u^4)}=7$, so bekommen wir folgende neue Werthe

$$x=81+2\cdot 16=113\quad \text{und}\quad y=2\cdot 3\cdot 2\cdot 7=84.$$

Hieraus erhalten wir $xx=12769$, und $x^4=163047361$; ferner $yy=7056$ und $y^4=49787136$, daher wird $x^4-2y^4=63473089$ wovon die Quadrat-Wurzel ist 7967, welche auch völlig übereintrifft mit der anfänglich angesetzten $pp-2qq$. Dann da $t=3$ und $u=2$, so wird $r=9$ und $s=4$, dahero $p=81-32=49$ und $q=72$, woraus $pp-2qq=2401-10368=-7967$.