unserer Formel gleich gesetzt giebt $6+2y=\frac{25}{4}$, $y=\frac{1}{8}$ und $z=\frac{9}{8}$; da nun $z=\frac{q}{p}$, so wird $q=9$ und $p=8$, dahero $x=\frac{367}{144}$, daraus wird unsere Formel $7+xx=\frac{279841}{20736}$, davon erstlich die Quadrat-Wurzel ist $\frac{529}{144}$, und hievon nochmals die Quadrat-Wurzel $\frac{23}{12}$, wovon also unsere Formel das Biquadrat ist.

161.

Endlich ist bey diesem Capitel noch zu erinnern, daß es einige Formeln gebe welche auf eine allgemeine Art zu einem Cubo gemacht werden können: dann wann z. E. cxx ein Cubus seyn soll, so setze man die Wurzel davon $=px$, und da wird $cxx=p^3x^3$ oder $c=p^3x$, dahero $x=\frac{c}{p^3}$; man schreibe $\frac{1}{q}$ an statt p, so wird $x=cq^3$.

Der Grund hiervon ist offenbahr weil die Formel ein Quadrat enthält, dahero auch alle dergleichen Formeln $a(b+cx)^2$ oder $abb+2abcx+accxx$ gantz leicht zu einem Cubo gemacht werden können; dann man setze die Cubic-Wurzel davon $=\frac{b+cx}{q}$, so wird $a(b+cx)^2=\frac{(b+cx)^3}{q^3}$, welche durch $(b+cx)^2$ dividirt giebt $a=\frac{b+cx}{q^3}$, daraus $x=\frac{aq^3-b}{c}$, wo man q nach Belieben bestimmen kann.

Hieraus erhellet wie höchst nützlich es sey die vorgegebene Formel in ihre Factores aufzulösen so oft solches geschehen kann, und von dieser Materie soll weitläuffig in dem folgenden Capitel gehandelt werden.

CAPITEL 11

VON DER AUFLÖSUNG DIESER FORMEL $axx+bxy+cyy$ IN FACTOREN

162.

Hier bedeuten die Buchstaben x und y nur allein gantze Zahlen, und wir haben auch aus dem bisherigen, wo man sich mit Brüchen begnügen mußte gesehen, wie die Frage immer auf gantze Zahlen gebracht werden kann. Dann ist z. E. die gesuchte Zahl x ein Bruch so darf man nur setzen $x=\frac{t}{u}$, da dann für t und u immer gantze Zahlen angegeben werden können, und weil dieser Bruch in der kleinsten Form ausgedrückt werden kann, so können die beyden Buchstaben t und u als solche angesehen werden, die unter sich keinen gemeinen Theiler haben.

In der gegenwärtigen Formel sind also x und y nur gantze Zahlen, und ehe wir zeigen können wie dieselbe zu einem Quadrat, oder Cubo, oder einer noch höheren Potestät gemacht werden soll, so ist nöthig zu untersuchen, was man den Buchstaben x und y für Werthe geben soll, daß diese Formel zwey oder mehr Factores erhalte.

163.

Hier kommen nun drey Fälle zu betrachten vor: der erste ist, wann sich diese Formel würcklich in zwey rationale Factores auflösen läßt, welches geschieht, wie wir schon oben gesehen haben, wann $bb - 4ac$ eine Quadrat-Zahl wird.

Der andere Fall ist, wann diese beyde Factores einander gleich werden, in welchem die Formel selbst ein würckliches Quadrat enthält.

Der dritte Fall ist, wann sich dieselbe nicht anders als in irrationale Factores auflösen läßt, dieselben mögen schlechtweg irrational oder gar imaginär seyn; jenes geschieht wann $bb - 4ac$ eine positive Zahl aber kein Quadrat ist, dieses aber wann $bb - 4ac$ negativ wird. Dieses sind nun die drey Fälle welche wir hier zu erwegen haben.

164.

Läßt sich unsere Formel in zwey rationale Factores auflösen, so kann dieselbe also vorgestellt werden $(fx + gy)(hx + ky)$, welche also schon ihrer Natur nach zwey Factores in sich schließt. Will man aber daß dieselbe auf eine allgemeine Art mehr Factores in sich schließe, so darf man nur setzen $fx + gy = pq$ und $hx + ky = rs$, da dann unsere Formel diesem Product $pqrs$ gleich wird, und also vier Factores in sich enthält, deren Anzahl nach Belieben vermehret werden könnte: hieraus aber erhalten wir für x einen doppelten Werth nemlich $x = \frac{pq - gy}{f}$ und $x = \frac{rs - ky}{h}$, woraus gefunden wird $hpq - hgy = frs - fky$, und also

$$y = \frac{frs - hpq}{fk - hg} \quad \text{und} \quad x = \frac{kpq - grs}{fk - hg};$$

damit nun x und y in gantzen Zahlen ausgedrückt werde, so müßen die Buchstaben p, q, r, s also angenommen werden, daß sich der Zehler durch den Nenner würcklich theilen laße, welches geschieht, wann sich entweder p und r oder q und s dadurch theilen laßen.

165.

Um dieses zu erläutern so sey diese Formel vorgegeben $xx - yy$, welche aus diesen Factoren besteht $(x + y)(x - y)$: soll dieselbe nun noch mehr Factoren haben, so setze man $x + y = pq$ und $x - y = rs$, so bekommt man $x = \frac{pq + rs}{2}$ und $y = \frac{pq - rs}{2}$; damit nun diese Zahlen gantz werden, so müßen die beiden Zahlen pq und rs zugleich entweder gerad seyn oder beyde ungerad.

Es sey z. E. $p = 7$, $q = 5$, $r = 3$ und $s = 1$, so wird $pq = 35$ und $rs = 3$, folglich $x = 19$ und $y = 16$: dahero entspringt $xx - yy = 105$, welche Zahl würcklich aus den Factoren $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ besteht; also hat dieser Fall nicht die geringste Schwierigkeit.

166.

Noch weniger Schwierigkeit hat der zweyte Fall, wo die Formel zwey gleiche Factores in sich schließt und demnach also vorgestellet werden kann $(fx + gy)^2$, welches Quadrat keine andere Factoren haben kann als welche aus der Wurzel $fx + gy$ entspringen, setzt man also $fx + gy = pqr$, so wird unsere Formel $ppqqrr$ und kann also so viel Factoren haben als man will. Hier wird von den zwey Zahlen x und y nur eine bestimmt, und die andere unserem Belieben frey gestellt, dann man bekommt $x = \frac{pqr - gy}{f}$, wo y leicht so angenommen werden kann daß der Bruch wegfält. Die leichteste Formel von dieser Art ist xx, nimmt man $x = pqr$, so schließt das Quadrat xx drey quadratische Factoren in sich, nemlich pp, qq und rr.

167.

Weit mehr Schwierigkeiten aber hat der dritte Fall, wo sich unsere Formel nicht in zwey rationale Factoren auflösen läßt, und da erfordert es besondere Kunstgriffe für x und y solche Werthe zu finden, aus welchen die Formel zwey oder mehr Factoren in sich enthält. Um diese Untersuchung zu erleichtern so ist zu mercken, daß unsere Formel leicht in eine andere verwandelt werden kann, wo das mittlere Glied fehlet, man darf nemlich nur setzen $x=\frac{z-by}{2a}$, da dann diese Formel heraus gebracht wird:

$$\frac{zz-2byz+bbyy}{4a}+\frac{byz-bbyy}{2a}+cyy=\frac{zz+(4ac-bb)yy}{4a}.$$

Wir wollen demnach so gleich das mittlere Glied weglaßen und diese Formel betrachten $axx+cyy$, wobey es darauf ankommt, was man den Buchstaben x und y für Werthe beylegen soll, damit diese Formel Factores erhalte. Es ist leicht zu erachten daß solches von der Natur der Zahlen a und c abhänge, und deswegen wollen wir mit einigen bestimmten Formeln dieser Art den Anfang machen.

168.

Es sey also erstlich diese Formel gegeben $xx+yy$, welche alle Zahlen in sich begreifet, so eine Summ von zwey Quadraten ist, und wovon wir die kleinsten bis 50 hier vorstellen wollen.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

unter welchen sich einige Prim-Zahlen befinden die keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41; die übrigen aber haben Theiler, woraus die Frage deutlicher wird, was man den Buchstaben x und y für Werthe geben müße, daß die Formel $xx+yy$ Theiler oder Factores hat und zwar so viel man ihrer will, wobey wir vor allen Dingen die Fälle ausschließen wo x und y einen gemeinen Theiler unter sich haben, weil alsdann $xx+yy$ sich auch durch denselben Theiler, und zwar durch das Quadrat desselben würde theilen laßen; dann wäre z. E. $x=7p$ und $y=7q$ so würde die Summ ihrer Quadrate $49pp+49qq=49(pp+qq)$ sich gar durch 49 theilen laßen. Dahero geht die Frage nur auf solche Formel wo x und y keinen gemeinen Theiler haben oder unter sich untheilbahr seyn. Die Schwierigkeit fält hier bald in die Augen, dann ob man gleich sieht, daß wann die beyden Zahlen x und y ungerad sind alsdann die Formel $xx+yy$ eine gerade Zahl und also durch 2 theilbahr werde; ist aber eine gerad und die andere ungerad, so wird die Formel ungerad, ob sie aber Theiler habe oder nicht? ist nicht so leicht zu sehen. Beyde Zahlen aber x und y können nicht gerad seyn, weil sie keinen gemeinen Theiler unter sich haben müßen.

169.

Es seyen demnach die beyden Zahlen x und y untheilbahr unter sich, und gleichwohl soll die Formel $xx+yy$ zwey oder mehr Factores in sich enthalten. Hier kann nun die obige Methode nicht statt finden, weil sich diese Formel nicht in zwey rationale Factores auflösen läßt; allein die irrationale Factores, in welche diese Formel aufgelößt wird und durch dieses Product vorgestellet werden kann $(x+y\sqrt{-1})\cdot(x-y\sqrt{-1})$ können uns eben denselben Dienst leisten; dann wann die Formel $xx+yy$ würckliche Factores hat, so müßen die irrationale Factoren wiederum Factores haben, indem wann diese Factoren keine weitere Theiler hätten, auch ihr Product keine haben könnte. Da aber diese Factores irrational ja so gar imaginär sind, und auch die Zahlen x und y keinen gemeinen Theiler haben sollen, so können dieselben keine rationale Factores haben, sondern sie müßen irrational und so gar imaginär von gleicher Art seyn.

170.

Will man also daß diese Formel $xx+yy$ zwey rationale Factores bekomme, so gebe man beyden irrationalen Factoren auch zwey Factores, und setze erstlich $x+y\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(r+s\sqrt{-1})$, da dann weil $\sqrt{-1}$ so wohl negativ als positiv genommen werden kann von selbsten seyn wird $x-y\sqrt{-1}=(p-q\sqrt{-1})(r-s\sqrt{-1})$, also daß das Product davon, das ist unsere Formel seyn wird $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$ und dieselbe folglich zwey rationale Factores enthält, nemlich $pp+qq$ und $rr+ss$. Hier ist aber noch übrig die Werthe von x und y zu bestimmen, als welche auch rational seyn müßen.

Wann man nun jene irrationale Factores mit einander multiplicirt, so bekommt man

$$x+y\sqrt{-1}=pr-qs+ps\sqrt{-1}+qr\sqrt{-1}$$

und

$$x-y\sqrt{-1}=pr-qs-ps\sqrt{-1}-qr\sqrt{-1},$$

addirt man diese Formeln, so wird $x=pr-qs$; subtrahirt man dieselben aber von einander, so wird $2y\sqrt{-1}=2ps\sqrt{-1}+2qr\sqrt{-1}$, oder $y=ps+qr$.

Nimmt man also $x=pr-qs$ und $y=ps+qr$, so erhält unsere Formel $xx+yy$ gewiß zwey Factores, indem herauskommt

$$xx+yy=(pp+qq)(rr+ss).$$

Verlangte man mehr Factores so dürfte man nur auf eben diese Art p und q so annehmen, daß $pp + qq$ zwey Factores hätte, und alsdann hätte man in allem drey Factores, deren Zahl auf gleiche Art nach Belieben vermehret werden kann.

171.

Da hier nur die Quadrate von p, q, r und s vorkommen, so können diese Buchstaben auch negativ genommen werden: nimmt man z. E. q negativ, so wird $x = pr + qs$ und $y = ps - qr$, von welchen die Summ der Quadraten eben diejenige ist als vorher; daraus ersehen wir, daß wann eine Zahl einem solchen Product $(pp + qq)(rr + ss)$ gleich ist, dieselbe auf eine doppelte Art in zwei Quadrate zerlegt werden könne, indem man gefunden erstlich

$$x = pr - qs \quad \text{und} \quad y = ps + qr,$$

und hernach auch

$$x = pr + qs \quad \text{und} \quad y = ps - qr.$$

Es sey z. E. $p = 3$, $q = 2$, $r = 2$ und $s = 1$, also daß dieses Product heraus käme $13 \cdot 5 = 65 = xx + yy$, da dann seyn wird entweder $x = 4$ und $y = 7$, oder $x = 8$ und $y = 1$; in beyden Fällen aber ist $xx + yy = 65$. Multiplicirt man mehrere dergleichen Zahlen mit einander, so wird auch das Product noch auf mehrere Arten eine Summ von zwey Quadrat-Zahlen seyn. Man multiplicire z. E. $2^2 + 1^2 = 5$, $3^2 + 2^2 = 13$, und $4^2 + 1^2 = 17$ mit ein ander, so kommt 1105 welche Zahl auf folgende Arten in zwey Quadraten zerlegt werden kann:

$$\text{I.) } 33^2 + 4^2, \quad \text{II.) } 32^2 + 9^2, \quad \text{III.) } 31^2 + 12^2, \quad \text{IV.) } 24^2 + 23^2.$$

172.

Unter den Zahlen die in der Form $xx + yy$ enthalten sind, befinden sich also erstlich solche, die aus zwey oder mehrere dergleichen Zahlen durch die Multiplication zusammen gesetzt sind; hernach aber auch solche welche nicht solchergestalt zusammen gesetzt sind: diese wollen wir einfache Zahlen von der Form $xx + yy$ nennen, jene aber zusammengesetzte; dahero werden die einfache Zahlen dieser Art seyn

$$1, \; 2, \; 5, \; 9, \; 13, \; 17, \; 29, \; 37, \; 41, \; 49 \text{ etc.}$$

in welcher Reihe zweyerley Zahlen vorkommen, nemlich Prim-Zahlen oder solche welche gar keine Theiler haben als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41 und welche alle außer 2 so beschaffen sind, daß wann man 1 davon weg nimmt das übrige durch 4 theilbahr werde, oder welche alle in dieser Form $4n+1$ enthalten sind: hernach sind auch Quadrat-Zahlen vorhanden 9, 49 etc. deren Wurzeln aber 3, 7 etc. nicht vorkommen; wobey zu mercken, daß diese Wurzeln 3, 7 etc. in dieser Form $4n-1$ enthalten sind. Es ist aber auch offenbahr daß keine Zahl von dieser Form $4n-1$ eine Summ von zwey Quadraten seyn könne, dann da diese Zahlen ungerad sind, so müßte eines von den beyden Quadraten gerad das andere aber ungerad seyn; wir haben aber gesehen, daß alle gerade Quadraten durch 4 theilbahr sind, die ungeraden aber in dieser Form $4n+1$ enthalten sind; wann man dahero ein grades und ein ungrades Quadrat zusammen addirt, so bekommt die Summ immer diese Form $4n+1$, niemals aber diese Form $4n-1$. Daß aber alle Prim-Zahlen von der Form $4n+1$ eine Summ von zwey Quadraten seyn, ist zwar gewiß, aber nicht so leicht zu beweisen.[1])

173.

Wir wollen weiter gehen, und die Formel $xx+2yy$ betrachten, um zu sehen was x und y für Werthe haben müßen damit dieselbe Factores erhalte. Da nun diese Formel durch diese imaginäre Factores vorgestellet wird

$$(x+y\sqrt{-2})(x-y\sqrt{-2}),$$

so ersieht man wie vorher, daß wann unsere Formel Factores hat, auch ihre imaginäre Factores welche haben müßen; man setze dahero erstlich

$$x+y\sqrt{-2}=(p+q\sqrt{-2})(r+s\sqrt{-2}),$$

so folget von selbsten daß auch seyn müße $x-y\sqrt{-2}=(p-q\sqrt{-2})(r-s\sqrt{-2})$, und hieraus wird unsere Formel $xx+2yy=(pp+2qq)(rr+2ss)$, und hat also zwey Factores, deren so gar ein jeder von eben derselben Art ist; damit aber

1) Dieser berühmte von FERMAT aufgestellte Satz ist zuerst von EULER bewiesen worden und zwar in der Abhandlung 241 (des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses): *Demonstratio theorematis FERMATIANI omnem numerum primum formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum*, Novi comment. acad. sc. Petrop. **5** (1754/5), 1760, p. 3—13; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 2. H. W.

dieses geschehe so müßen gehörige Werthe für x und y gefunden werden, welches folgender Gestalt geschehen kann. Da

$$x+y\sqrt{-2}=pr-2qs+qr\sqrt{-2}+ps\sqrt{-2}$$

und

$$x-y\sqrt{-2}=pr-2qs-qr\sqrt{-2}-ps\sqrt{-2}$$

so ist die Summ $2x=2pr-4qs$, folglich $x=pr-2qs$; hernach giebt die Differenz $2y\sqrt{-2}=2qr\sqrt{-2}+2ps\sqrt{-2}$, dahero $y=qr+ps$. Wann also unsere Formel $xx+2yy$ Factores haben soll, so sind dieselben immer also beschaffen, daß der eine seyn wird $pp+2qq$ und der andere $rr+2ss$, oder sie sind beyde Zahlen von eben der Art als $xx+2yy$; und damit dieses geschehe so können x und y wieder auf zweyerley Art bestimmt werden, weil q so wohl negativ als positiv genommen werden kann. Man wird nemlich haben, erstlich

$$x=pr-2qs \quad \text{und} \quad y=ps+qr,$$

und hernach auch

$$x=pr+2qs \quad \text{und} \quad y=ps-qr.$$

174.

Diese Formel $xx+2yy$ enthält also alle diejenigen Zahlen in sich, welche aus einem Quadrat und einem doppelten Quadrat bestehen, und welche wir hier bis auf 50 setzen wollen: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 48, 49, 50; die wir wieder wie vorher in einfache und zusammengesetzte abtheilen können; da werden dann die einfachen, welche nicht aus den vorhergehenden zusammengesetzt sind, folgende seyn 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49 welche alle außer den Quadraten 25 und 49 Prim-Zahlen sind; von denen aber die hier nicht stehen kommen die Quadrate vor. Man kann hier auch bemercken daß alle Prim-Zahlen die in unserer Formel enthalten sind, entweder in dieser Form $8n+1$ oder in dieser $8n+3$ gehören, da hingegen die übrigen welche entweder in dieser Form $8n+5$ oder in dieser $8n+7$ enthalten sind, nimmermehr aus einem Quadrat und einem doppelten Quadrat bestehen können: es ist aber auch gewis daß alle Primzahlen, die in einer von den ersten beyden Formen $8n+1$ und $8n+3$ enthalten sind, sich allezeit in ein Quadrat und ein doppeltes Quadrat auflösen laßen.

175.

Laßt uns auf eine gleiche Weise zu dieser allgemeinen Formel $xx + cyy$ fortschreiten, und sehen was man x und y für Werthe geben muß, damit diese Formel Factores erhalte.

Da nun dieselbe durch dieses Produkt vorgestellet wird

$$(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c}),$$

so gebe man einem jeden dieser Factoren wiederum zwey Factores von gleicher Art: man setze nemlich

$$x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-c}),$$

und

$$x - y\sqrt{-c} = (p - q\sqrt{-c})(r - s\sqrt{-c});$$

und da wird unsere Formel werden

$$xx + cyy = (pp + cqq)(rr + css),$$

woraus erhellet daß die Factores wiederum von eben der Art als die Formel selbst seyn werden, die Werthe aber von x und y werden sich folgender Gestalt verhalten: $x = pr - cqs$ und $y = qr + ps$, oder $x = pr + cqs$ und $y = ps - qr$, und hieraus ist leicht abzusehen wie unsere Formel noch mehr Factores erhalten könne.[1])

176.

Nun ist es auch leicht dieser Formel $xx - cyy$ Factores zu verschaffen, weil man nur $-c$ anstatt $+c$ schreiben darf; inzwischen laßen sich dieselben auch unmittelbar also finden; da unsere Formel diesem Product gleich ist $(x + y\sqrt{c})(x - y\sqrt{c})$, so setze man

$$x + y\sqrt{c} = (p + q\sqrt{c})(r + s\sqrt{c}) \quad \text{und} \quad x - y\sqrt{c} = (p - q\sqrt{c})(r - s\sqrt{c}),$$

---

1) Aus der Zerlegung:

$$x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-c})$$

erhält man

$$x = pr - cqs, \qquad y = ps + qr.$$

Da man aber, wie schon in § 171 und § 173 gesagt ist, q auch negativ nehmen kann, so folgt auch:

$$x = pr + cqs, \qquad y = ps - qr.$$

Danach sind die Formeln des Originaltextes korrigiert und ergänzt worden: der erste Wert von x war dort gleich $pr + cqs$ gesetzt, während ein zweiter Wert von x überhaupt nicht angegeben war. H. W.

woraus sogleich diese Factores erfolgen $xx-cyy=(pp-cqq)(rr-css)$, welche wieder von eben der Art als unsere Formel selbst sind; die Werthe aber von x und y laßen sich auch wiederum auf eine doppelte Art bestimmen nemlich erstlich $x=pr+cqs$, $y=qr+ps$, und hernach auch $x=pr-cqs$ und $y=ps-qr$. Will man die Probe machen ob solchergestalt das gefundene Product herauskomme, so probire man die erstern Werthe, da dann seyn wird $xx=pprr+2cpqrs+ccqqss$ und $yy=ppss+2pqrs+qqrr$, also $cyy=cppss+2cpqrs+cqqrr$, woraus man erhält:

$$xx-cyy=pprr-cppss+ccqqss-cqqrr$$

welches mit dem gefundenen Product $(pp-cqq)\,(rr-css)$ über einkommt.

177.

Bis hieher haben wir das erste Glied blos betrachtet, nun wollen wir setzen daß dasselbe auch mit einem Buchstaben multiplicirt sey, und suchen was die Formel $axx+cyy$ für Factores erhalten könne.

Hier ist nun klar daß unsere Formel diesem Product gleich sey

$$(x\sqrt{a}+y\sqrt{-c})(x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}),$$

welchen beyden Factoren demnach wiederum Factores gegeben werden müßen. Hierbey aber ereignet sich eine Schwierigkeit, dann wann man zu folge der obigen Art setzen wollte

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}+s\sqrt{-c})=apr-cqs+ps\sqrt{-ac}+qr\sqrt{-ac},$$

und

$$x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}-s\sqrt{-c})=apr-cqs-ps\sqrt{-ac}-qr\sqrt{-ac},$$

woraus man erhielte

$$2x\sqrt{a}=2apr-2cqs, \quad \text{und} \quad 2y\sqrt{-c}=2ps\sqrt{-ac}+2qr\sqrt{-ac},$$

so würde man so wohl für x als y irrationale Werthe finden, welche hier keineswegs stattfinden.

178.

Dieser Schwierigkeit aber kann abgeholffen werden, wann man setzet:

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-ac})=pr\sqrt{a}-cqs\sqrt{a}+qr\sqrt{-c}+aps\sqrt{-c}$$

und

$$x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r-s\sqrt{-ac})=pr\sqrt{a}-cqs\sqrt{a}-qr\sqrt{-c}-aps\sqrt{-c};$$

woraus nun für x und y folgende rationale Werthe gefunden werden:

$$x = pr - cqs \quad \text{und} \quad y = qr + aps,$$

alsdann aber wird unsere Formel folgende Factores bekommen

$$axx + cyy = (app + cqq)(rr + acss),$$

von welchen nur einer eben die Form hat als unsere Formel, der andere aber von einer gantz anderen Gattung ist.

179.

Unterdessen stehen doch diese zwey Formeln in einer sehr genauen Verwandtschaft mit einander, indem alle Zahlen so in der ersteren Form enthalten sind, wann sie mit einer Zahl von der zweyten Form multiplicirt werden, wiederum in die erste Form fallen. Wir haben auch schon gesehen, daß zwey Zahlen von der zweyten Form $xx + acyy$, als welche mit der obigen $xx + cyy$ übereinkommt, mit einander multipliciret wieder eine Zahl von der zweyten Form geben.

Also ist nur noch zu untersuchen, wann zwey Zahlen von der ersten Form $axx + cyy$ mit einander multiplicirt werden, zu welcher Form das Product alsdann gehöre.

Laßt uns demnach diese zwey Formeln von der ersten Art

$$(app + cqq)(arr + css)$$

mit ein ander multipliciren, und da ist leicht zu sehen daß ihr Product also vorgestellt werden könne $(apr + cqs)^2 + ac(ps - qr)^2$. Setzen wir nun hier $apr + cqs = x$ und $ps - qr = y$, so bekommen wir diese Formel $xx + acyy$ welche von der letzteren Art ist; dahero dann zwey Zahlen von der erstern Art $axx + cyy$ mit einander multiplicirt eine Zahl von der zweyten Art geben, welches man kürtzlich also vorstellen kann: die Zahlen von der ersten Art wollen wir durch I, die von der andern Art aber durch II andeuten, und also I · I giebt II; I · II giebt I; II · II giebt II, woraus auch ferner erhellet, was heraus kommen müsse, wann man mehrere solche Zahlen mit ein ander multiplicirt: als I · I · I giebt I; I · I · II giebt II; I · II · II giebt I; II · II · II giebt II.

180.

Um dieses zu erläutern so sey $a = 2$ und $c = 3$ woraus diese zwey Arten von Zahlen entspringen, die erste ist enthalten in der Form $2xx + 3yy$, die andere aber in der Form $xx + 6yy$. Nun aber sind die Zahlen der erstern bis auf 50 folgende:

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

In der zweyten Art sind folgende Zahlen bis 50 enthalten:

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Laßt uns nun eine Zahl von der ersten Art z. E. 35 mit einer von der zweyten Art 31 multipliciren, so ist das Product 1085, welche Zahl gewiß in der Form $2xx + 3yy$ enthalten ist, oder man kann vor y eine solche Zahl finden daß $1085 - 3yy$ ein doppeltes Quadrat nemlich $2xx$ werde; dieses geschieht nun erstlich wann $y = 3$, dann da wird $x = 23$; hernach auch wann $y = 11$, dann da wird $x = 19$; drittens auch noch wann $y = 13$, dann da wird $x = 17$, und endlich viertens wann $y = 19$, dann da wird $x = 1$.

Man kann diese beyde Arten von Zahlen wiederum in einfache und zusammengesetzte abtheilen, indem diejenigen zusammengesetzte sind welche aus zwey oder mehr kleinern Zahlen von der einen oder der andern Art bestehen: also werden von der ersten Art die folgende einfach seyn: 2, 3, 5, 11, 29, diese aber zusammengesetzt 8, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50. Von der zweyten Art aber sind folgende einfach 1, 7, 31, die übrigen sind alle zusammengesetzt nemlich 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

CAPITEL 12

VON DER VERWANDELUNG DIESER FORMEL $axx + cyy$ IN QUADRATEN ODER AUCH HÖHEREN POTESTÄTEN

181.

Wir haben schon oben gesehen, daß Zahlen von dieser Form $axx + cyy$ öfters unmöglich zu Quadrate gemacht werden können: so oft es aber möglich ist, so kann diese Form in eine andere verwandelt werden in welcher $a = 1$ ist. Z. E. diese Form $2pp - qq$ kann ein Quadrat werden, sie läßt sich aber auch solcher Gestalt vorstellen $(2p + q)^2 - 2(p + q)^2$. Setzt man nun $2p + q = x$ und $p + q = y$, so kommt diese Formel $xx - 2yy$ heraus, wo $a = 1$ und $c = -2$ ist. Eben eine solche Verwandelung findet auch