146.

Nur so weit ist man bisher gekommen in Auflösung der Quadrat-Wurzel-Zeichen, da nemlich die höchste Potestät hinter denselben die vierte nicht übersteiget. Sollte demnach in einer solchen Formel die fünfte oder eine noch höhere Potestät von $x$ vorkommen, so sind die bisherigen Kunstgriffe nicht hinlänglich eine Auflösung davon zu geben, wenn auch gleich schon ein Fall bekannt wäre. Um dieses deutlicher zu zeigen so betrachte man diese Formel $kk + bx + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5$, wo das erste Glied schon ein Quadrat ist, wollte man nun die Wurzel davon wie vorher setzen $k + px + qxx$ und $p$ und $q$ so bestimmen, daß die zweyten und dritten Glieder wegfielen, so blieben doch noch drey übrig, welche durch $x^3$ dividirt eine quadratische Gleichung geben würden, woraus $x$ durch ein neues Wurzel-Zeichen bestimmt würde. Wollte man aber die Wurzel setzen $k + px + qxx + rx^3$ so würde das Quadrat bis zur sechsten Potestät aufsteigen, allso daß wann gleich $p$, $q$, und $r$ so bestimmt würden, daß die zweyten, dritten und vierten Glieder wegfielen, dennoch die vierte, fünfte und sechste Potestät übrig bliebe, welche durch $x^4$ dividirt wieder auf eine quadratische Gleichung führte, und also nicht ohne Wurzel-Zeichen aufgelößt werden könnte. Dahero wir genöthiget sind hiemit die Formeln die ein Quadrat seyn sollen zu verlaßen. Wir wollen demnach zu den cubischen Wurzel-Zeichen fortschreiten.

## CAPITEL 10

## VON DER ART DIESE IRRATIONAL-FORMEL $\sqrt[3]{(a + bx + cxx + dx^3)}$ RATIONAL ZU MACHEN

147.

Hier werden also solche Werthe für $x$ erfordert daß diese Formel $a + bx + cxx + dx^3$ eine Cubic-Zahl werde, und daraus also die Cubic-Wurzel gezogen werden könne. Hiebey ist zu erinnern daß diese Formel die dritte Potestät nicht überschreiten müße, weil sonsten die Auflösung davon nicht zu hoffen wäre. Sollte die Formel nur bis auf die zweyte Potestät gehen und das Glied $dx^3$ wegfallen, so würde die Auflösung nicht leichter werden: fielen aber die zwey letzten Glieder weg, also daß diese Formel $a + bx$ zu einem Cubo gemacht werden müßte, so hätte die Sache gar keine Schwierigkeit, indem man nur setzen dürfte $a+bx=p^3$, und daraus so gleich gefunden würde $x=\frac{p^3-a}{b}$.

## 148.

Hier ist wiederum vor allen Dingen zu mercken daß wann weder das erste noch das letzte Glied ein Cubus ist, an keine Auflösung zu gedencken sey, wofern nicht schon ein Fall, darin die Formel ein Cubus wird, bekannt ist, derselbe mag nun so gleich in die Augen fallen, oder erst durch probiren gefunden werden müßen.

Das erstere geschieht nun, erstlich wann das erste Glied ein Cubus ist und die Formel $f^3+bx+cxx+dx^3$, wo der bekannte Fall ist $x=0$; hernach auch wann das letzte Glied ein Cubus und die Formel also beschaffen ist $a+bx+cxx+g^3x^3$; aus diesen beyden Fällen entspringt der dritte wo so wohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist, welche drey Fälle wir hier erwegen wollen.

## 149.

I. Fall. Es sey die vorgegebene Formel $f^3+bx+cxx+dx^3$, welche ein Cubus werden soll.

Man setze demnach die Wurzel davon $f+px$, also daß unsere Formel diesem Cubo gleich seyn soll $f^3+3ffpx+3fppxx+p^3x^3$; da nun die ersten Glieder von selbsten wegfallen, so bestimme man $p$ dergestalt daß auch die zweyten wegfallen, welches geschieht wann $b=3ffp$, oder $p=\frac{b}{3ff}$; alsdann geben die übrigen Glieder durch $xx$ dividirt diese Gleichung $c+dx=3fpp+p^3x$, woraus gefunden wird $x=\frac{c-3fpp}{p^3-d}$. Wäre das letzte Glied $dx^3$ nicht vorhanden, so könnte man die Cubic-Wurzel schlecht weg setzen $=f$, da man dann bekommen würde $f^3=f^3+bx+cxx$: oder $b+cx=0$ und daraus $x=-\frac{b}{c}$, woraus aber nichts weiter geschloßen werden könnte.

## 150.

II. Fall. Die vorgegebene Formel habe nun zweytens diese Gestallt $a+bx+cxx+g^3x^3$, man setze die Cubic-Wurzel $p+gx$, davon der Cubus ist $p^3+3gppx+3ggpxx+g^3x^3$, da sich dann die letzten Glieder aufheben; nun bestimme man $p$ also daß auch die letzten ohne eins wegfallen, welches geschieht wann $c=3ggp$ oder $p=\frac{c}{3gg}$: alsdann geben die zwey ersten diese

Gleichung $a + bx = p^3 + 3gppx$, woraus gefunden wird $x = \frac{a - p^3}{3gpp - b}$. Wäre das erste Glied $a$ nicht vorhanden gewesen, so hätte man die Cubic-Wurzel auch schlechtweg setzen können $= gx$, da denn $g^3x^3 = bx + cxx + g^3x^3$ oder $0 = b + cx$, folglich $x = -\frac{b}{c}$; welches aber gemeiniglich zu nichts dienet.

151.

III. Fall. Es sey endlich drittens die vorgegebene Formel

$$f^3 + bx + cxx + g^3x^3,$$

worinn so wohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist; dahero dieselbe auf beyde vorhergehende Arten tractiert und also zwey Werthe für $x$ heraus gebracht werden können.

Außer diesen aber kann man auch noch die Wurzel setzen $f + gx$, also daß unsere Formel diesem Cubo gleich werden soll $f^3 + 3ffgx + 3fggxx + g^3x^3$, da dann die erste und letzten Glieder einander aufheben, die übrigen aber durch $x$ dividirt diese Gleichung geben $b + cx = 3ffg + 3fggx$, und daraus $x = \frac{b - 3ffg}{3fgg - c}$.

152.

Fällt aber die gegebene Formel in keine von diesen drey Arten, so ist dabey nichts anders zu thun, als daß man suche einen Werth zu errathen, da dieselbe ein Cubus wird: hat man einen solchen gefunden welcher sey $x = h$, also daß $a + bh + chh + dh^3 = k^3$, so setze man $x = h + y$, da dann unsere Formel diese Gestalt bekommen wird:

$$\begin{array}{l}
a \\
bh \;\; + by \\
chh + 2chy + cyy \\
dh^3 + 3dhhy + 3dhyy + dy^3 \\
\hline
k^3 + (b + 2ch + 3dhh)y + (c + 3dh)yy + dy^3
\end{array}$$

welche zu der ersten Art gehört, und also für $y$ ein Werth gefunden werden kann, woraus man dann einen neuen Werth für $x$ erhält, aus welchem nachgehens auf gleiche Weise noch mehr gefunden werden können.

153.

Wir wollen nun diese Methode durch einige Exempel erläutern und erstlich diese Formel $1+x+xx$ vornehmen, welche ein Cubus seyn soll, und zur ersten Art gehöret. Man könnte also sogleich die Cubic-Wurzel $=1$ setzen, daraus gefunden würde $x+xx=0$, das ist $x(1+x)=0$; folglich entweder $x=0$ oder $x=-1$, woraus aber nichts weiter folgt. Man setze dahero die Cubic-Wurzel $1+px$, wovon der Cubus ist $1+3px+3ppxx+p^3x^3$, und mache $1=3p$ oder $p=\frac{1}{3}$, so geben die übrigen Glieder durch $xx$ dividirt $1=3pp+p^3x$, oder $x=\frac{1-3pp}{p^3}$; da nun $p=\frac{1}{3}$, so wird $x=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}}=18$, und dahero unsere Formel $1+18+324=343$, wovon die Cubic-Wurzel ist $1+px=7$. Wollte man nun weiter setzen $x=18+y$, so würde unsere Formel diese Gestalt bekommen $343+37y+yy$, wovon nach der ersten Regel die Cubic-Wurzel zu setzen wäre $7+py$, wovon der Cubus ist

$$343+147py+21ppyy+p^3y^3;$$

nun setze man $37=147p$, oder $p=\frac{37}{147}$, so geben die übrigen Glieder diese Gleichung $1=21pp+p^3y$, also

$$y=\frac{1-21pp}{p^3}, \text{ das ist } y=-\frac{340\cdot 21\cdot 147}{37^3}=-\frac{1049580}{50653},$$

woraus noch weiter neue Werthe gefunden werden können.

154.

Es sey ferner diese Formel gegeben $2+xx$, welche ein Cubus werden soll. Hier muß nun vor allen Dingen ein Fall errathen werden da dieses geschieht, welcher ist $x=5$; man setze demnach so gleich $x=5+y$, so bekommt man $27+10y+yy$; davon sey die Cubic-Wurzel $3+py$, und also die Formel selbst diesem Cubo $27+27py+9ppyy+p^3y^3$ gleich; man mache $10=27p$, oder $p=\frac{10}{27}$, so bekommt man $1=9pp+p^3y$, und daraus $y=\frac{1-9pp}{p^3}$, das ist $y=-\frac{19\cdot 9\cdot 27}{1000}$ oder $y=-\frac{4617}{1000}$, und $x=\frac{383}{1000}$: hieraus wird unsere Formel $2+xx=\frac{2146689}{1000000}$, wovon die Cubic-Wurzel seyn muß $3+py=\frac{129}{100}$.

155.

Man betrachte ferner diese Formel $1+x^3$, ob dieselbe ein Cubus werden könne, außer den zwey offenbahren Fällen $x=0$ und $x=-1$? Ob nun gleich diese Formel zum dritten Fall gehöret, so hilft uns doch die Wurzel $1+x$ nichts, weil der Cubus davon $1+3x+3xx+x^3$ unserer Formel gleich gesetzt $3x+3xx=0$ oder $x(1+x)=0$ giebt, das ist entweder $x=0$ oder $x=-1$.

Will man ferner setzen $x=-1+y$, so bekommen wir diese Formel $3y-3yy+y^3$, welche ein Cubus seyn soll und zum zweyten Fall gehöret: setzt man daher die Cubic-Wurzel $p+y$ wovon der Cubus ist

$$p^3+3ppy+3pyy+y^3,$$

und macht $-3=3p$ oder $p=-1$, so geben die übrigen

$$3y=p^3+3ppy=-1+3y,$$

folglich $y=\frac{1}{0}$ das ist unendlich; woraus also nichts gefunden wird. Es ist auch alle Mühe vergebens um noch andere Werthe für $x$ zu finden, weil man aus andern Gründen beweisen kann daß diese Formel $1+x^3$ außer den gemeldten Fällen, nimmer ein Cubus werden kann; dann man hat gezeiget daß die Summ von zweyen Cubis als $t^3+x^3$ niemals ein Cubus werden kann,[1]) dahero ist es auch nicht möglich in dem Fall $t=1$.

156.

Man behauptet auch daß $2+x^3$ kein Cubus werden könne außer dem Fall $x=-1$; diese Formel gehört zwar zu dem zweyten Fall, es wird aber durch die daselbst gebrauchte Regel nichts heraus gebracht weil die mittlern Glieder fehlen. Setzt man aber $x=-1+y$, so bekommt man diese Formel $1+3y-3yy+y^3$, welche nach allen drey Fällen tractirt werden kann. Setzt man nach dem ersten die Wurzel $1+y$, davon der Cubus $1+3y+3yy+y^3$ ist, so wird $-3yy=3yy$, welches nur geschieht wann $y=0$. Setzt man

1) Dies ist der erste Fall des von Kronecker so genannten „Großen Fermatschen Satzes“, der besagt, daß die Gleichung $x^n+y^n=z^n$ für $n>2$ in ganzen Zahlen $x$, $y$, $z$ nicht lösbar sei, dessen allgemeiner Beweis aber bis jetzt noch nicht gefunden ist.

Euler hat übrigens den Beweis für $n=3$, auf den er hier anspielt, in der *Algebra* selbst entwickelt (siehe Kapitel 15, § 243). Ebenso hat er den Beweis des Satzes für $n=4$, der also besagt, daß die Summe von zwei Biquadraten niemals wieder ein Biquadrat sein kann, im Kapitel 13, § 205, erbracht. H. W.

nach dem zweyten Fall die Wurzel $-1+y$, wovon der Cubus $-1+3y-3yy+y^3$, so wird $1+3y=-1+3y$ und $y=\frac{2}{0}$, welches unendlich ist. Nach der dritten Art müßte man die Wurzel setzen $1+y$ welches schon geschehen.

157.

Es sey diese Formel gegeben $3+3x^3$ welche ein Cubus werden soll; dieses geschieht nun erstlich in dem Fall $x=-1$, woraus aber nichts geschloßen werden kann, hernach aber auch in dem Fall $x=2$: man setze deswegen $x=2+y$, so kommt diese Formel heraus $27+36y+18yy+3y^3$, welche zum ersten Fall gehöret, dahero sey die Wurzel $3+py$, wovon der Cubus $27+27py+9ppyy+p^3y^3$; man mache allso $36=27p$ oder $p=\frac{4}{3}$, so geben die übrigen Glieder durch $yy$ dividirt, $18+3y=9pp+p^3y=16+\frac{64}{27}y$, oder $\frac{17}{27}y=-2$, dahero $y=-\frac{54}{17}$, folglich $x=-\frac{20}{17}$; hieraus wird unsere Formel $3+3x^3=-\frac{9261}{4913}$, wovon die Cubic-Wurzel ist $3+py=-\frac{21}{17}$; und aus diesem Werth könnte man noch mehrere finden wann man wollte.

158.

Wir wollen zuletzt noch diese Formel betrachten $4+xx$, welche in zwey bekannten Fällen ein Cubus wird, nemlich wann $x=2$ und $x=11$. Setzt man nun erstlich $x=2+y$, so muß diese Formel ein Cubus seyn $8+4y+yy$, dessen Wurzel sey $2+\frac{1}{3}y$, und also die Formel $=8+4y+\frac{2}{3}yy+\frac{1}{27}y^3$, woraus man erhält $1=\frac{2}{3}+\frac{1}{27}y$, dahero $y=9$ und $x=11$, welches der andere bekannte Fall ist.

Setzt man nun ferner $x=11+y$, so bekommt man $125+22y+yy$, so dem Cubo von $5+py$, das ist $125+75py+15ppyy+p^3y^3$ gleich gesetzt, und $p=\frac{22}{75}$ genommen, giebt $1=15pp+p^3y$ oder $p^3y=1-15pp=-\frac{109}{375}$; dahero $y=-\frac{122625}{10648}$, und also $x=-\frac{5497}{10648}$.

Weil $x$ so wohl negativ als positiv seyn kann so setze man $x=\frac{2+2y}{1-y}$, so wird unsere Formel $\frac{8+8yy}{(1-y)^2}$, welche ein Cubus seyn soll; man multiplicire also oben und unten mit $1-y$, damit der Nenner ein Cubus werde und da bekommt man $\frac{8-8y+8yy-8y^3}{(1-y)^3}$, wo also nur noch der Zehler $8-8y+8yy-8y^3$, oder eben derselbe durch 8 dividirt nemlich $1-y+yy-y^3$ zu einem Cubo gemacht werden muß, welche Formel zu allen drey Arten gehört.

Setzt man nun nach der ersten Art die Wurzel $= 1 - \frac{1}{3}y$, wovon der Cubus ist $1 - y + \frac{1}{3}yy - \frac{1}{27}y^3$, so wird $1 - y = \frac{1}{3} - \frac{1}{27}y$, oder $27 - 27y = 9 - y$, dahero $y = \frac{9}{13}$, folglich $1 + y = \frac{22}{13}$ und $1 - y = \frac{4}{13}$, folglich $x = 11$ wie vorher.

Nach der andern Art, wann man die Wurzel setzen wollte $\frac{1}{3} - y$, findet man eben dasselbe.

Nach der dritten Art, wann man die Wurzel setzt $1 - y$, wovon der Cubus ist $1 - 3y + 3yy - y^3$, bekommt man $-1 + y = -3 + 3y$, und also $y = 1$, folglich $x = \frac{4}{0}$, das ist unendlich; dahero wird auf diese Art nichts neues gefunden.

159.

Weil wir aber diese zwey Fälle schon wißen $x = 2$ und $x = 11$, so kann man setzen $x = \frac{2+11y}{1 \pm y}$; dann ist $y = 0$ so wird $x = 2$, ist aber $y$ unendlich groß so wird $x = \pm 11$.

Es sey demnach erstlich $x = \frac{2+11y}{1+y}$, so wird unsere Formel

$$4 + \frac{4+44y+121yy}{1+2y+yy} \quad \text{oder} \quad \frac{8+52y+125yy}{(1+y)^2};$$

man multiplicire oben und unten mit $1 + y$, damit der Nenner ein Cubus werde, und nur noch der Zehler welcher seyn wird $8 + 60y + 177yy + 125y^3$, zu einem Cubo gemacht werden soll.

Man setze demnach erstlich die Wurzel $= 2 + 5y$, hierdurch würden nicht nur die zwey ersten Glieder sondern auch die letzten wegfallen, und also nichts gefunden werden.

Man setze demnach nach der zweyten Art die Wurzel $p + 5y$, davon der Cubus $p^3 + 15ppy + 75pyy + 125y^3$ und mache $177 = 75p$, oder $p = \frac{59}{25}$, so wird $8 + 60y = p^3 + 15ppy$, dahero $-\frac{2943}{125}y = \frac{80379}{15625}$ und $y = -\frac{80379}{367875}$, woraus $x$ gefunden werden könnte.

Man kann aber auch setzen $x = \frac{2+11y}{1-y}$, und da wird unsere Formel

$$4 + \frac{4+44y+121yy}{1-2y+yy} = \frac{8+36y+125yy}{(1-y)^2},$$

wovon der Nenner mit $1 - y$ multiplicirt ein Cubus wird. Allso muß auch $8 + 28y + 89yy - 125y^3$ ein Cubus werden.

Setzen wir hier nach der ersten Art die Wurzel $= 2 + \frac{7}{3}y$, davon der Cubus ist $8 + 28y + \frac{98}{3}yy + \frac{343}{27}y^3$, so wird $89 - 125y = \frac{98}{3} + \frac{343}{27}y$, oder

$\frac{3718}{27}y = \frac{169}{3}$, und also $y = \frac{1521}{3718} = \frac{9}{22}$; folglich $x = 11$, welches der schon bekante Fall ist.

Setzt man ferner nach der dritten Art die Wurzel $2 - 5y$, wovon der Cubus ist $8 - 60y + 150yy - 125y^3$, so erhalten wir $28 + 89y = -60 + 150y$, folglich $y = \frac{88}{61}$, woraus gefunden wird $x = -\frac{1090}{27}$, und unsere Formel wird $\frac{1191016}{729}$, welches der Cubus ist von $\frac{106}{9}$.

160.

Dieses sind nun die bisher bekannten Methoden wodurch eine solche Formel, entweder zu einem Quadrat oder zu einem Cubo gemacht werden kann, wann nur in jenem Fall die höchste Potestät der unbestimmten Zahl den vierten Grad, in letzterm aber den dritten nicht übersteiget.

Man könnte noch den Fall hinzufügen da eine gegebene Formel zu einem Biquadrat gemacht werden soll, in welchem die höchste Potestät die zweyte nicht übersteigen muß. Wann aber eine solche Formel $a + bx + cxx$ ein Biquadrat seyn soll so muß dieselbe vor allen Dingen zu einem Quadrat gemacht werden, da dann nur noch übrig ist daß die Wurzel von diesem Quadrat noch ferner zu einem Quadrat gemacht werde, wozu die Regel schon oben gegeben worden. Also wann zum Exempel $xx + 7$ ein Biquadrat seyn soll, so mache man dieselbe zuerst zu einem Quadrat welches geschieht wann $x = \frac{7pp - qq}{2pq}$ oder auch $x = \frac{qq - 7pp}{2pq}$; alsdann wird unsere Formel gleich diesem Quadrat

$$\frac{q^4 - 14qqpp + 49p^4}{4ppqq} + 7 = \frac{q^4 + 14qqpp + 49p^4}{4ppqq},$$

wovon die Wurzel ist $\frac{7pp + qq}{2pq}$, welche noch zu einem Quadrat gemacht werden muß: man multiplicire demnach oben und unten mit $2pq$, damit der Nenner ein Quadrat werde, und alsdann wird der Zehler $2pq(7pp + qq)$ ein Quadrat seyn müßen, welches nicht anders geschehen kann als nachdem man schon einen Fall errathen hat. Man kann zu diesem Ende setzen $q = pz$, damit diese Formel $2ppz(7pp + ppzz) = 2p^4z(7 + zz)$ und also auch durch $p^4$ dividirt, nemlich diese $2z(7 + zz)$ ein Quadrat werden soll. Hier ist nun der bekannte Fall $z = 1$, dahero setze man $z = 1 + y$, so bekommen wir

$$(2 + 2y)(8 + 2y + yy) = 16 + 20y + 6yy + 2y^3,$$

wovon die Wurzel sey $4 + \frac{5}{2}y$, davon das Quadrat $16 + 20y + \frac{25}{4}yy$, und unserer Formel gleich gesetzt giebt $6 + 2y = \frac{25}{4}$, $y = \frac{1}{8}$ und $z = \frac{9}{8}$; da nun $z = \frac{q}{p}$, so wird $q = 9$ und $p = 8$, dahero $x = \frac{367}{144}$, daraus wird unsere Formel $7 + xx = \frac{279841}{20736}$, davon erstlich die Quadrat-Wurzel ist $\frac{529}{144}$, und hievon nochmals die Quadrat-Wurzel $\frac{23}{12}$, wovon also unsere Formel das Biquadrat ist.

161.

Endlich ist bey diesem Capitel noch zu erinnern, daß es einige Formeln gebe welche auf eine allgemeine Art zu einem Cubo gemacht werden können: dann wann z. E. $cxx$ ein Cubus seyn soll, so setze man die Wurzel davon $= px$, und da wird $cxx = p^3x^3$ oder $c = p^3x$, dahero $x = \frac{c}{p^3}$; man schreibe $\frac{1}{q}$ an statt $p$, so wird $x = cq^3$.

Der Grund hiervon ist offenbahr weil die Formel ein Quadrat enthält, dahero auch alle dergleichen Formeln $a(b + cx)^2$ oder $abb + 2abcx + accxx$ gantz leicht zu einem Cubo gemacht werden können; dann man setze die Cubic-Wurzel davon $= \frac{b + cx}{q}$, so wird $a(b + cx)^2 = \frac{(b + cx)^3}{q^3}$, welche durch $(b + cx)^2$ dividirt giebt $a = \frac{b + cx}{q^3}$, daraus $x = \frac{aq^3 - b}{c}$, wo man $q$ nach Belieben bestimmen kann.

Hieraus erhellet wie höchst nützlich es sey die vorgegebene Formel in ihre Factores aufzulösen so oft solches geschehen kann, und von dieser Materie soll weitläuffig in dem folgenden Capitel gehandelt werden.

## CAPITEL 11

## VON DER AUFLÖSUNG DIESER FORMEL $axx + bxy + cyy$ IN FACTOREN

162.

Hier bedeuten die Buchstaben $x$ und $y$ nur allein gantze Zahlen, und wir haben auch aus dem bisherigen, wo man sich mit Brüchen begnügen mußte gesehen, wie die Frage immer auf gantze Zahlen gebracht werden kann. Dann ist z. E. die gesuchte Zahl $x$ ein Bruch so darf man nur setzen $x = \frac{t}{u}$, da dann für $t$ und $u$ immer gantze Zahlen angegeben werden können, und weil dieser Bruch in der kleinsten Form ausgedrückt werden kann, so