DES ZWEYTEN THEILS ZWEYTER ABSCHNITT

VON DER UNBESTIMMTEN ANALYTIC

CAPITEL 1

VON DER AUFLÖSUNG DER EINFACHEN GLEICHUNGEN WORINNEN MEHR ALS EINE UNBEKANNTE ZAHL VORKOMMT

1.

Aus dem obigen ist zu ersehen, wie eine unbekante Zahl durch eine Gleichung; zwey unbekante Zahlen aber durch zwey Gleichungen; 3 durch 3; 4 durch 4 und so fort bestimmt werden können; also daß allezeit eben so viel Gleichungen erfordert werden, als unbekante Zahlen bestimmt werden sollen, wann anders die Frage selbst bestimmt ist.

Wann aber weniger Gleichungen aus der Frage gezogen werden können, als unbekante Zahlen angenommen worden, so bleiben einige unbestimmt und werden unserer Willkühr überlaßen; dahero solche Fragen unbestimmt genennt werden, und welche einen eigenen Teil der Analytic ausmachen, so die unbestimmte Analytic genennt zu werden pflegt.

2.

Da in diesen Fällen eine oder mehr unbekante Zahlen nach unserm Belieben angenommen werden können, so finden in der That viele Auflösungen statt.

Allein es wird gemeiniglich diese Bedingung hinzu gefügt, daß die gesuchten Zahlen, gantze und so gar positiv, oder zum wenigsten Rational-Zahlen seyn sollen; wodurch die Anzahl aller möglichen Auflösungen ungemein eingeschränkt wird, also daß öfters nur etliche wenige öfters zwar auch unendlich viele, welche aber nicht so leicht in die Augen fallen, Platz finden, bisweilen auch so gar keine einzige möglich ist. Daher dieser Theil der Analytic öfters gantz besondere Kunst-Griffe erfordert, und nicht wenig dienet den Verstand der Anfänger aufzuklären, und denselben eine größere Fertigkeit im Rechnen beyzubringen.

3.

Wir wollen mit einer der leichtesten Fragen den Anfang machen, und zwey Zahlen suchen, deren Summe 10 seyn soll, wobey es sich versteht, daß diese Zahlen gantz und Positiv seyn sollen.

Dieselben Zahlen seyen nun x und y, also daß seyn soll $x+y=10$, woraus gefunden wird $x=10-y$, also daß y nicht anders bestimmt wird, als daß es eine gantze und positive Zahl seyn soll; man könnte dahero für y alle gantze Zahlen, von 1 bis ins unendliche annehmen, da aber x auch positiv seyn muß, so kann y nicht größer als 10 angenommen werden, weil sonsten x negativ seyn würde; und wann auch 0 nicht gelten soll, so kann y höchstens 9 gesetzt werden, weil sonsten $x=0$ würde; woher nur die folgenden Auflösungen Platz haben:

wann	$y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$
so wird	$x=9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.$

Von diesen neun Auflösungen aber sind die vier letztern mit den vier erstern einerley, dahero in allen nur fünf verschiedene Auflösungen statt finden.

Sollten drey Zahlen verlangt werden, deren Summe 10 wäre, so dürfte man nur die eine von den hier gefundenen beyden Zahlen noch in zwey Theile zertheilen, woraus man eine größere Menge Auflösungen erhalten würde.

4.

Da dieses gar keine Schwierigkeit hat, so wollen wir zu etwas schwereren Fragen fortschreiten.

I. Frage: Man soll 25 in zwey Theile zertheilen, wovon der eine sich durch 2 der andere aber durch 3 theilen laße?

Es sey der eine Theil $2x$, der andere $3y$, so muß seyn $2x+3y=25$. Also $2x=25-3y$. Man theile durch 2 so kommt $x=\frac{25-3y}{2}$, woraus wir zuerst sehen, daß $3y$ kleiner seyn muß als 25 und dahero y nicht größer als 8. Man ziehe so viel gantze daraus als möglich, das ist man theile den Zehler $25-3y$ durch den Nenner 2, so wird $x=12-y+\frac{1-y}{2}$; also muß sich $1-y$

oder auch $y-1$ durch 2 theilen laßen. Man setze dahero $y-1=2z$ und also $y=2z+1$, so wird $x=12-2z-1-z=11-3z$; weil nun y nicht größer sein kann als 8, so können auch für z keine andern Zahlen angenommen werden als solche, die $2z+1$ nicht größer geben als 8. Folglich muß z kleiner seyn als 4, dahero z nicht größer als 3 genommen werden kann, woraus diese Auflösungen folgen:

Setzt man	$z=0$,	$z=1$,	$z=2$,	$z=3$,
so wird	$y=1$,	$y=3$,	$y=5$,	$y=7$,
und	$x=11$,	$x=8$,	$x=5$,	$x=2$,

dahero die gesuchten zwey Theile von 25 seyn werden:

I.) $22+3$, II.) $16+9$, III.) $10+15$, IV.) $4+21$.

5.

II. Frage: Man theile 100 in zwey Theile, so daß der erste sich durch 7, der andere aber durch 11 theilen laße?

Der erste Theil sey demnach $7x$ der andere aber $11y$, so muß seyn

$$7x+11y=100; \text{ dahero } x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98+2-7y-4y}{7},$$

also wird $x=14-y+\frac{2-4y}{7}$; also muß $2-4y$ oder $4y-2$ sich durch 7 theilen laßen. Läßt sich aber $4y-2$ durch 7 theilen, so muß sich auch die Hälfte davon $2y-1$ durch 7 theilen laßen, man setze dahero $2y-1=7z$, oder $2y=7z+1$, so wird $x=14-y-2z$; da aber seyn muß $2y=7z+1=6z+z+1$, so hat man $y=3z+\frac{z+1}{2}$. Nun setze man $z+1=2u$ oder $z=2u-1$, so wird $y=3z+u$. Folglich kann man für u eine jede gantze Zahl nehmen, daraus weder x noch y negativ wird, und alsdann bekommt man: $y=7u-3$ und $x=19-11u$.

Nach der ersten Formel muß $7u$ größer seyn als 3, nach der andern aber muß $11u$ kleiner seyn als 19, oder u kleiner als $\frac{19}{11}$, also daß u nicht einmahl 2 seyn kann, da nun u unmöglich nicht 0 seyn kann, so bleibt nur ein einiger Werth übrig nemlich $u=1$, daraus bekommen wir $x=8$ und $y=4$; dahero die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden I.) 56 und II.) 44.

6.

III. Frage: Man theile 100 in zwey solche Theile, wann man den ersten theilt durch 5, daß 2 übrig bleiben, und wann man den zweyten theilt durch 7 daß 4 übrig bleiben?

Da der erste Theil durch 5 dividirt 2 übrig läßt, so setze man denselben $5x+2$, und weil der andere durch 7 dividirt 4 übrig läßt, so setze man denselben $7y+4$; also wird

$$5x+7y+6=100 \quad \text{oder} \quad 5x=94-7y=90+4-5y-2y,$$

hieraus $x=18-y-\frac{2y-4}{5}$; also muß $4-2y$, oder $2y-4$, oder auch die Hälfte davon $y-2$ durch 5 theilbahr seyn. Man setze dahero $y-2=5z$ oder $y=5z+2$, so wird $x=16-7z$; woraus erhellet daß $7z$ kleiner seyn muß als 16, folglich z kleiner als $\frac{16}{7}$ und also nicht größer als 2. Wir haben also hier drey Auflösungen.

I.) $z=0$, giebt $x=16$, und $y=2$; woraus die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden $82+18$.

II.) $z=1$, giebt $x=9$, und $y=7$; woraus die beyden Theile seyn werden $47+53$.

III.) $z=2$, giebt $x=2$, und $y=12$; woraus die beyden Theile sind $12+88$.

7.

IV. Frage: Zwey Bäuerinnen haben zusammen 100 Eyer, die erste spricht: wann ich die meinigen je zu 8 überzähle, so bleiben 7 übrig, die andere spricht: wann ich die meinigen zu 10 überzähle so bleiben mir auch 7 übrig; wie viel hat jede Eyer gehabt?

Weil die Zahl der ersten durch 8 dividirt 7 übrig läßt, die Zahl der andern aber durch 10 dividirt auch 7 übrig läßt, so setze man die Zahl der ersten $8x+7$, der andern aber $10y+7$, also daß $8x+10y+14=100$, oder $8x=86-10y$, oder $4x=43-5y=40+3-4y-y$; dahero setze man $y-3=4z$, so wird $y=4z+3$ und $x=10-4z-3-z=7-5z$, folglich muß $5z$ kleiner seyn als 7 und also z kleiner als 2, woraus diese zwey Auflösungen entspringen:

I.) $z=0$, giebt $x=7$, und $y=3$; dahero die erste Bäuerin gehabt hat 63 Eyer, die andere aber 37.

II.) $z=1$, giebt $x=2$, und $y=7$; dahero die erste Bäuerin gehabt hat 23 Eyer, die andere aber 77.

8.

V. Frage: Eine Gesellschaft von Männern und Weibern haben zusammen verzehrt 1000 Copeken. Ein Mann hat bezahlt 19 Cop. eine Frau aber 13 Cop. wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die Zahl der Männer sey $=x$, der Weiber aber $=y$, so bekommt man diese Gleichung $19x+13y=1000$. Daraus wird $13y=1000-19x$ oder $13y=988+12-13x-6x$, also wird $y=76-x+\frac{12-6x}{13}$; also muß sich $12-6x$ oder $6x-12$, und auch der sechste Theil davon $x-2$ durch 13 theilen lassen. Man setze also $x-2=13z$, so wird $x=13z+2$ und $y=76-13z-2-6z$ oder $y=74-19z$; also muß z kleiner seyn als $\frac{74}{19}$ und folglich kleiner als 4, dahero folgende vier Auflösungen Platz finden:

I.) $z=0$, giebt $x=2$ und $y=74$. Also waren 2 Männer und 74 Weiber; jene haben bezahlt 38 Cop. diese aber 962 Cop.

II.) $z=1$, giebt die Zahl der Männer $x=15$ und die Zahl der Weiber $y=55$; jene haben verzehrt 285 Cop. diese aber 715 Cop.

III.) $z=2$, giebt die Zahl der Männer $x=28$ und die Zahl der Weiber $y=36$; jene haben verzehrt 532 Cop. diese aber 468 Cop.

IV.) $z=3$, giebt die Zahl der Männer $x=41$, und die Zahl der Weiber $y=17$; jene haben verzehrt 779 Cop. diese aber 221 Cop.

9.

VI. Frage: Ein Amtman kauft Pferde und Ochsen zusammen für 1770 Rthl. Zahlt für ein Pferd 31 Rthl. für einen Ochsen aber 21 Rthl. wie viel sind es Pferde und Ochsen gewesen?

Die Zahl der Pferde sey $=x$, der Ochsen aber $=y$, so muß seyn: $31x+21y=1770$ oder $21y=1770-31x=1764+6-21x-10x$, und also $y=84-x+\frac{6-10x}{21}$; dahero muß $10x-6$ und also auch die Hälfte $5x-3$ durch 21 theilbahr seyn; man setze also $5x-3=21z$, dahero $5x=21z+3$ also daß $y=84-x-2z$. Da nun $x=\frac{21z+3}{5}$ oder $x=4z+\frac{z+3}{5}$, so setze man $z+3=5u$, so wird

$$z=5u-3, \quad x=21u-12 \quad \text{und} \quad y=84-21u+12-10u+6=102-31u;$$

dahero u größer seyn muß als 0 und doch kleiner als 4, woraus wir diese drey Auflösungen erhalten:

I.) $u=1$, giebt die Zahl der Pferde $x=9$ und der Ochsen $y=71$; jene haben gekost 279 Rthl. diese aber 1491, zusammen 1770 Rthl.

II.) $u=2$, giebt die Zahl der Pferde $x=30$ und der Ochsen $y=40$; jene haben gekost 930 Rthl. diese aber 840, zusammen 1770 Rthl.

III.) $u=3$, giebt die Zahl der Pferde $x=51$ und der Ochsen $y=9$; jene haben gekost 1581 Rthl. diese aber 189 Rthl. zusammen 1770 Rthl.

10.

Die bisherigen Fragen leiten auf eine solche Gleichung $ax + by = c$, wo a, b und c gantze und positive Zahlen bedeuten, und für x und y auch gantze und positive Zahlen gefordert werden.

Wann aber b negativ ist, und die Gleichung eine solche Form erhält $ax = by + c$, so sind die Fragen von einer gantz andern Art, und laßen eine unendliche Menge Auflösungen zu, wovon die Methode noch in diesem Capitel erkläret werden soll. Die leichtesten Fragen von dieser Art sind dergleichen: Wann man z. E. zwey Zahlen sucht, deren Differenz seyn soll 6, so setze man die kleinere $= x$, die größere $= y$, und da muß seyn $y - x = 6$, folglich $y = 6 + x$. Hier hindert nun nicht, daß nicht vor x alle mögliche gantze Zahlen sollten genommen werden können, und was man immer vor eine nimmt, so wird y allezeit um 6 größer. Nehme man z. E. $x = 100$ so wäre $y = 106$; woraus gantz klar ist, daß unendlich viel Auflösungen statt finden.

11.

Hernach folgen die Fragen, wo $c = 0$ und ax schlecht weg dem by gleich seyn soll. Man suche nemlich eine Zahl, die sich so wohl durch 5 als auch durch 7 theilen laße, und setze diese Zahl $= N$, so muß erstlich seyn $N = 5x$, weil die Zahl N durch 5 theilbahr seyn soll; hernach muß auch seyn $N = 7y$, weil sich diese Zahl auch durch 7 soll theilen laßen; dahero bekommt man $5x = 7y$ und also $x = \frac{7y}{5}$; da sich nun 7 nicht theilen läßt durch 5, so muß sich y dadurch theilen laßen. Man setze demnach $y = 5z$, so wird $x = 7z$, dahero die gesuchte Zahl $N = 35z$, wo man für z eine jede gantze Zahl annehmen kann, also daß für N unendlich viel Zahlen angegeben werden können, welche sind:

35, 70, 105, 140, 175, 210, etc.

Wollte man, daß sich die Zahl N noch über dieses durch 9 theilen ließe, so wäre erstlich $N = 35z$, hernach müßte auch seyn $N = 9u$ allso $35z = 9u$ und daraus $u = \frac{35z}{9}$; woraus klar ist, daß sich z durch 9 muß theilen laßen. Es sey demnach $z = 9s$, so wird $u = 35s$ und die gesuchte Zahl $N = 315s$.

12.

Mehr Schwierigkeit hat es, wann die Zahl c nicht 0 ist, als wann seyn soll $5x = 7y + 3$, welche Gleichung herauskommt, wann eine solche Zahl N

gefunden werden soll, welche sich erstlich durch 5 theilen laße; wann aber dieselbe durch 7 dividirt wird 3 übrig bleiben, dann alsdann muß seyn $N = 5x$, hernach aber $N = 7y + 3$ und deswegen wird $5x = 7y + 3$ folglich

$$x = \frac{7y+3}{5} = \frac{5y+2y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}.$$

Man setze $2y + 3 = 5z$, so wird $x = y + z$; da aber $2y + 3 = 5z$, oder $2y = 5z - 3$, so wird $y = \frac{5z-3}{2}$, oder $y = 2z + \frac{z-3}{2}$. Man setze nun $z - 3 = 2u$ so wird $z = 2u + 3$ und $y = 5u + 6$, und $x = y + z = 7u + 9$; folglich die gesuchte Zahl $N = 35u + 45$, wo für u alle gantze Zahlen können angenommen werden auch so gar negative, wann nur N positiv wird, welches hier geschiehet wann $u = -1$, dann da wird $N = 10$; die folgenden erhält man, wann man dazu immer 35 addirt, dahero die gesuchte Zahlen sind

10, 45, 80, 115, 150, 185, 220, etc.

13.

Die Auflösung solcher Fragen beruhet auf die Verhältniß der beyden Zahlen, wodurch getheilt werden soll, und nach der Beschaffenheit derselben wird die Auflösung bald kürtzer bald weitläuffiger; folgende Frage leidet eine kurtze Auflösung.

VII. Frage: Man suche eine Zahl, welche durch 6 dividirt 2 übrig laße, durch 13 aber dividirt 3 übrig laße?

Diese Zahl sey N, so muß erstlich seyn $N = 6x + 2$ hernach aber $N = 13y + 3$; also wird $6x + 2 = 13y + 3$ und $6x = 13y + 1$, daher

$$x = \frac{13y+1}{6} = 2y + \frac{y+1}{6}.$$

Man setze also $y + 1 = 6z$, so wird $y = 6z - 1$ und $x = 2y + z = 13z - 2$; folglich wird die gesuchte Zahl $N = 78z - 10$. Solche Zahlen sind demnach folgende 68, 146, 224, 302, 380, etc. welche nach einer Arithmetischen Progression fortgehen, deren Differenz ist $78 = 6 \cdot 13$. Wann man also nur eine von diesen Zahlen weis, so laßen sich alle übrigen leicht finden, indem man nur nöthig hat 78 immer dazu zu addiren, oder auch davon zu subtrahiren, so lange es angeht.

14.

Ein Exempel, wo es schwerer wird, mag folgendes seyn.

VIII. Frage: Man suche eine Zahl N welche durch 39 dividirt 16 übrig laße und durch 56 dividirt 27 übrig laße?

Erstlich muß also seyn $N = 39p + 16$ hernach aber $N = 56q + 27$; dahero wird $39p + 16 = 56q + 27$, oder $39p = 56q + 11$ und $p = \frac{56q+11}{39}$, oder $p = q + \frac{17q+11}{39} = q + r$; also daß $r = \frac{17q+11}{39}$; daher wird $39r = 17q + 11$ und $q = \frac{39r-11}{17} = 2r + \frac{5r-11}{17} = 2r + s$; also daß $s = \frac{5r-11}{17}$ oder $17s = 5r - 11$, daher wird $r = \frac{17s+11}{5} = 3s + \frac{2s+11}{5} = 3s + t$; also daß $t = \frac{2s+11}{5}$, oder $5t = 2s + 11$ und so wird $s = \frac{5t-11}{2} = 2t + \frac{t-11}{2} = 2t + u$; also daß $u = \frac{t-11}{2}$ und $t = 2u + 11$. Da nun kein Bruch mehr vorhanden, so kann man u nach Belieben annehmen und daraus erhalten wir rückwärts folgende Bestimmungen

$$\begin{aligned}
t &= 2u + 11 \\
s &= 2t + u = 5u + 22 \\
r &= 3s + t = 17u + 77 \\
q &= 2r + s = 39u + 176 \\
p &= q + r = 56u + 253
\end{aligned}$$

und endlich $N = 39 \cdot 56u + 9883$. Um die kleinste Zahl für N zu finden, setze man $u = -4$, so wird $N = 1147$; setzt man $u = x - 4$, so wird $N = 2184x - 8736 + 9893$, oder $N = 2184x + 1147$. Diese Zahlen machen demnach eine Arithmetische Progression, deren erstes Glied ist 1147 und die Differenz $= 2184$. Diese Zahlen sind demnach

1147, 3331, 5515, 7699, 9883, etc.

15.

Zur Uebung wollen wir noch einige Fragen beyfügen:

IX. Frage: Eine Gesellschaft von Männern und Weibern sind in einem Wirthshaus; ein Mann verzehrt 25 Cop. ein Weib aber 16 Cop. und es findet sich, daß die Weiber insgesammt einen Cop. mehr verzehrt haben, als die Männer; wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die Zahl der Weiber sey gewesen $= p$, der Männer aber $= q$, so haben die Weiber verzehret $16p$, die Männer aber $25q$; dahero muß seyn $16p = 25q + 1$ und da wird $p = \frac{25q+1}{16} = q + \frac{9q+1}{16} = q + r$; also daß $r = \frac{9q+1}{16}$ oder $9q = 16r - 1$; dahero wird $q = \frac{16r-1}{9} = r + \frac{7r-1}{9} = r + s$, also daß $s = \frac{7r-1}{9}$, oder $9s = 7r - 1$; dahero wird $r = \frac{9s+1}{7} = s + \frac{2s+1}{7} = s + t$, also daß $t = \frac{2s+1}{7}$

oder $7t = 2s + 1$; dahero wird $s = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{2} = 3t + u$, also daß $u = \frac{t-1}{2}$ oder $2u = t - 1$, dahero $t = 2u + 1$. Hieraus erhalten wir nun rückwärts:

$$\begin{aligned} t &= 2u + 1 \\ s &= 3t + u = 7u + 3 \\ r &= s + t = 9u + 4 \\ q &= r + s = 16u + 7 \\ p &= q + r = 25u + 11 \end{aligned}$$

dahero war die Anzahl der Weiber $25u + 11$, der Männer aber $16u + 7$, wo man für u in gantzen Zahlen anehmen kann was man will. Die kleinere Zahlen sind demnach nebst den folgenden wie hier stehet:

Anzahl der Weiber: $= 11, 36, 61, 86, 111$, etc.
der Männer: $= 7, 23, 39, 55, 71$, etc.

Nach der ersten Auflösung in die kleinste Zahlen haben die Weiber verzehrt 176 Cop. die Männer aber 175; also die Weiber einen Cop. mehr als die Männer.

16.

X. Frage: Einer kauft Pferde und Ochsen, zahlt für ein Pferd 31 Rthl. für einen Ochsen aber 20 Rthl. und es findet sich daß die Ochsen insgesammt 7 Rthl. mehr gekostet haben als die Pferde; wie viel sind es Ochsen und Pferde gewesen?

Es sey die Anzahl der Ochsen $= p$, der Pferde aber $= q$, so muß

$$\begin{array}{llll} 20p = 31q + 7, & \text{dahero} & p = \frac{31q+7}{20} = q + \frac{11q+7}{20} = q + r, & \text{dahero} \\ 20r = 11q + 7, & \text{und} & q = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{11} = r + s, & \text{dahero} \\ 11s = 9r - 7, & \text{und} & r = \frac{11s+7}{9} = s + \frac{2s+7}{9} = s + t, & \text{dahero} \\ 9t = 2s + 7, & \text{und} & s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u, & \text{dahero} \\ 2u = t - 7, & \text{und} & t = 2u + 7 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} s &= 4t + u = 9u + 28 \\ r &= s + t = 11u + 35 \\ q &= r + s = 20u + 63 \text{ Zahl der Pferde} \\ p &= q + r = 31u + 98 \text{ Zahl der Ochsen.} \end{aligned}$$

Hieraus findet man die kleinsten positiven Zahlen für p und q, wann man setzt $u = -3$; die größeren steigen nach Arithmetischen Progressionen wie folgt:

Zahl der Ochsen $p = 5,\ 36,\ 67,\ 98,\ 129,\ 160,\ 191,\ 222,\ 253,$ etc.

Zahl der Pferde $q = 3,\ 23,\ 43,\ 63,\ 83,\ 103,\ 123,\ 143,\ 163,$ etc.

17.

Wann wir bey diesem Exempel erwegen, wie die Buchstaben p und q durch die folgende bestimmt werden, so ist leicht einzusehen, daß solches auf der Verhältniß der Zahlen 31 und 20 beruhet, und zwar auf derjenigen, nach welcher der größte gemeine Theiler dieser beyden Zahlen gefunden zu werden pflegt, wie aus folgendem erhellet:

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c|l}
20 & 31 & 1 & & & & \\
 & \underline{20} & & & & & \\
 & 11 & 20 & 1 & & & \\
 & & \underline{11} & & & & \\
 & & 9 & 11 & 1 & & \\
 & & & \underline{9} & & & \\
 & & & 2 & 9 & 4 & \\
 & & & & \underline{8} & & \\
 & & & & 1 & 2 & 2 \\
 & & & & & \underline{2} & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Dann hier ist klar, daß die Quotienten in der auf einander folgenden Bestimmung der Buchstaben p, q, r, s, etc. vorkommen und mit dem ersten Buchstaben auf der rechten Hand verbunden sind, indem der letztere immer einfach bleibt; bey der letzten Gleichung aber kommt allererst die Zahl 7 zum Vorschein und zwar mit dem Zeichen *plus*, weil die letzte Bestimmung die fünfte ist, wäre aber die Zahl derselben gerad gewesen, so hätte -7 gesetzt werden müßen. Solches wird deutlicher erhellen aus der folgenden Tabelle, wo erstlich die Zergliederung der Zahlen 31 und 20, und hernach die Bestimmung der Buchstaben p, q, r, etc. vorkommt.

$$\begin{array}{rl|rl} 31 = & 1\cdot 20 + 11 & p = & 1\cdot q + r \\ 20 = & 1\cdot 11 + 9 & q = & 1\cdot r + s \\ 11 = & 1\cdot 9 + 2 & r = & 1\cdot s + t \\ 9 = & 4\cdot 2 + 1 & s = & 4\cdot t + u \\ 2 = & 2\cdot 1 + 0 & t = & 2\cdot u + 7 \end{array}$$

18.

Auf diese Art kann auch das vorhergehende Exempel im 14ten §. vorgestellt werden, wie folget:

$$\begin{array}{rl|rl} 56 = & 1\cdot 39 + 17 & p = & 1\,.\,q + r \\ 39 = & 2\cdot 17 + 5 & q = & 2\cdot r + s \\ 17 = & 3\cdot 5 + 2 & r = & 3\cdot s + t \\ 5 = & 2\cdot 2 + 1 & s = & 2\cdot t + u \\ 2 = & 2\cdot 1 + 0 & t = & 2\cdot u + 11 \end{array}$$

19.

Solcher Gestalt sind wir im Stande alle dergleichen Exempel auf eine allgemeine Art aufzulösen:

Es sey nemlich gegeben diese Gleichung $bp = aq + n$, wo a, b und n bekante Zahlen sind. Hier muß man nur eben die Operation anstellen, als wann man zwischen den Zahlen a und b den größten gemeinen Theiler suchen wollte, aus welchen so gleich p und q durch die folgende Buchstaben bestimmt werden, wie folget:

$$\begin{array}{rl|rl} \text{Es sey } a = & Ab + c & \text{so wird } p = & Aq + r \\ b = & Bc + d & q = & Br + s \\ c = & Cd + e & r = & Cs + t \\ d = & De + f & s = & Dt + u \\ e = & Ef + g & t = & Eu + v \\ f = & Fg + 0 & u = & Fv \pm n \end{array}$$

Hier wird in der letzten Bestimmung $+n$ genommen, wann die Anzahl der Bestimmungen ungerad ist, hingegen aber $-n$, wann dieselbe Zahl gerade ist. Solcher Gestalt können nun alle dergleichen Fragen ziemlich geschwind aufgelöset werden, wovon wir einige Exempel geben wollen.

20.

XI. Frage: Es werde eine Zahl gesucht, welche durch 11 dividirt 3 übrig laße, durch 19 aber 5?

Diese Zahl sey N, dahero muß erstlich seyn $N = 11p + 3$ hernach auch $N = 19q + 5$ dahero wird $11p + 3 = 19q + 5$ oder $11p = 19q + 2$, woraus die folgende Tabelle verfertiget wird:

$19 = 1 \cdot 11 + 8$	$p = q + r$
$11 = 1 \cdot 8 + 3$	$q = r + s$
$8 = 2 \cdot 3 + 2$	$r = 2s + t$
$3 = 1 \cdot 2 + 1$	$s = t + u$
$2 = 2 \cdot 1 + 0.$	$t = 2u + 2$

wo man u nach Belieben annehmen kann, und daraus die vorhergehenden Buchstaben der Ordnung nach rückwärts bestimmen, wie folget:

$$\begin{aligned} t &= 2u + 2 \\ s &= t + u = 3u + 2 \\ r &= 2s + t = 8u + 6 \\ q &= r + s = 11u + 8 \\ p &= q + r = 19u + 14 \end{aligned}$$

hieraus bekommt man die gesuchte Zahl $N = 209u + 157$, dahero ist die kleinste Zahl für N 157.

21.

XII. Frage: Man suche eine Zahl N welche wie vorher durch 11 dividirt 3, und durch 19 dividirt 5 übrig laße; wann dieselbe aber durch 29 dividirt wird, daß 10 übrig bleiben?

Nach der letzten Bedingung muß seyn $N = 29p + 10$, und da die zwey ersten Bedingungen schon berechnet worden, so muß zufolge derselben seyn wie oben gefunden worden $N = 209u + 157$, wofür wir schreiben wollen $N = 209q + 157$, dahero wird $29p + 10 = 209q + 157$ oder $29p = 209q + 147$; woraus die folgende Operation angestellet wird:

$$
\begin{array}{rlrl}
209 &= 7 \cdot 29 + 6; & \text{also} \quad p &= 7q + r \\
29 &= 4 \cdot \ \ 6 + 5; & q &= 4r + s \\
6 &= 1 \cdot \ \ 5 + 1; & r &= \ \ s + t \\
5 &= 5 \cdot \ \ 1 + 0; & s &= 5t - 147
\end{array}
$$

von wannen wir folgender Gestalt zurück gehen

$$
\begin{array}{rl}
s &= 5t - 147 \\
r &= \ \ s + t = \ \ \ 6t - \ \ 147 \\
q &= 4r + s = \ \ 29t - \ \ 735 \\
p &= 7q + r = 209t - 5292
\end{array}
$$

dahero $N = 6061t - 153458$. Die kleinste Zahl kommt heraus, wann man setzt $t = 26$, da wird $N = 4128$.

22.

Es ist aber hier wohl zu bemercken daß wann eine solche Gleichung $bp = aq + n$ aufgelößt werden soll, die beyden Zahlen a und b keinen gemeinen Theiler außer 1 haben müßen, dann sonsten wäre die Frage unmöglich, wann nicht die Zahl n eben denselben gemeinen Theiler hätte.

Dann wann z. E. seyn sollte $9p = 15q + 2$, wo 9 und 15 den gemeinen Theiler 3 haben, wodurch sich 2 nicht theilen läßt, so ist es unmöglich diese Frage aufzulösen, weil $9p - 15q$ allezeit durch 3 theilbar ist und also niemahls 2 werden kann, wäre aber in diesem Fall $n = 3$ oder $n = 6$ etc. so wäre die Frage wohl möglich, man müßte aber die Gleichung durch 3 theilen, da dann herauskäme $3p = 5q + 1$ welche nach der obigen Regel leicht aufgelöset wird. Also sieht man deutlich, daß die beyden Zahlen a und b keinen gemeinen Theiler außer 1 haben müßen, und daß die vorgegebene Regel in keinen andern Fällen Platz haben kann.

23.

Um dieses deutlicher zu zeigen, wollen wir die Gleichung $9p = 15q + 2$ nach dem natürlichen Weg behandeln. Da wird nun

$$p = \frac{15q + 2}{9} = q + \frac{6q + 2}{9} = q + r,$$

also daß $9r = 6q + 2$ oder $6q = 9r - 2$; dahero

$$q = \frac{9r-2}{6} = r + \frac{3r-2}{6} = r + s,$$

also daß $3r - 2 = 6s$ oder $3r = 6s + 2$; dahero

$$r = \frac{6s+2}{3} = 2s + \frac{2}{3},$$

welches offenbar niemahls eine gantze Zahl werden kann, weil s nothwendig eine gantze Zahl seyn muß, woraus offenbar zu ersehen, daß dergleichen Fragen ihrer Natur nach unmöglich sind.

CAPITEL 2

VON DER SOGENANNTEN REGEL-COECI WO AUS ZWEY GLEICHUNGEN DREY ODER MEHR UNBEKANTE ZAHLEN BESTIMMT WERDEN SOLLEN

24.

In dem vorhergehenden Capitel haben wir gesehen, wie aus einer Gleichung zwey unbekante Zahlen bestimmt werden sollen, dergestalt daß dafür gantze und positive Zahlen gefunden werden. Sind aber zwey Gleichungen vorgegeben und die Frage soll unbestimmt seyn, so müßten mehr als zwey unbekante Zahlen vorkommen. Dergleichen Fragen kommen in den gemeinen Rechen-Büchern vor und pflegen nach der so genannten Regel-Coeci aufgelöst zu werden, von welcher wir hier den Grund anzeigen wollen.

25.

Wir wollen mit einem Exempel den Anfang machen:

I. Frage: 30 Personen, Männer, Weiber und Kinder verzehren in einem Wirths-Hauß 50 Rthl. daran zahlt ein Mann 3 Rthl. ein Weib 2 Rthl. und ein Kind 1 Rthl. wie viel Personen sind von jeder Gattung gewesen?

Es sey die Zahl der Männer $= p$, der Weiber $= q$, und der Kinder $= r$, so erhält man die zwey folgende Gleichungen

$$\text{I.)}\ p + q + r = 30, \qquad \text{II.)}\ 3p + 2q + r = 50;$$

aus welchen die drey Buchstaben p, q und r in gantzen und positiven Zahlen