so wird $2p = pp - qq$ und daraus $qq = pp - 2p$. Diesen Werth setze man im dritten für qq, so wird dasselbe $4pp - 4p$. Welches dem ersten gleich gesetzt giebt $2p = 4pp - 4p$. Man addire $4p$ so wird $6p = 4pp$, durch p dividirt $6 = 4p$ und also $p = \frac{3}{2}$.

Hieraus $qq = -\frac{3}{4}$ und $q = \frac{\sqrt{-3}}{2}$; folglich sind unsere gesuchten Zahlen $p + q = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$ und die andere $p - q = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$ welche wir auch vorher gefunden.

CAPITEL 9

VON DER NATUR DER QUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

127.

Aus dem vorhergehenden hat man zur Genüge ersehen, daß die Quadratische Gleichungen auf eine doppelte Art aufgelöst werden können, welche Eigenschaft allerdings verdienet in Erwegung gezogen zu werden, weil dadurch die Natur der höhern Gleichungen nicht wenig erläutert wird. Wir wollen dahero genauer untersuchen, woher es komme, daß eine jede Quadratische Gleichung zweyerley Auflösungen zulaße, weil darinn ohnstreitig eine sehr wesentliche Eigenschaft dieser Gleichungen enthalten ist.

128.

Man hat zwar schon gesehen, daß diese doppelte Auflösung daher rühret, weil die Quadrat-Wurzel aus einer jeglichen Zahl so wohl negativ als positiv gesetzt werden könne: allein dieser Grund würde sich nicht wohl auf höhere Gleichungen anwenden laßen, dahero wird es gut seyn den Grund davon noch auf eine andere Art deutlich vor Augen zu legen. Es ist demnach nöthig zu erklären woher es komme daß eine Quadratische Gleichung als z. E. $xx = 12x - 35$ auf eine doppelte Art aufgelöset werden, oder daß vor x zweyerley Werthe angezeiget werden können, welche beyde der Gleichung ein Genüge leisten, wie in diesem Exempel vor x so wohl 5 als 7 gesetzt werden kann, indem in beyden Fällen xx und $12x - 35$ einander gleich werden.

129.

Um den Grund hievon deutlicher darzulegen, so ist es dienlich alle Glieder der Gleichung auf eine Seite zu bringen, so daß auf der andern 0 zu stehen kommt. Dahero die obige Gleichung seyn wird $xx - 12x + 35 = 0$, wobey es darauf ankommt, daß eine solche Zahl gefunden werde, welche wann sie vor x gesetzt wird, die Formel $xx - 12x + 35$ würcklich in nichts verwandelt werde; und hernach muß auch die Ursach gezeigt werden warum solches auf zweyerley Art geschehen könne.

130.

Hier kommt nun alles darauf an, daß man deutlich zeige, daß eine solche Formel $xx - 12x + 35$ als ein Product aus zwey Factoren angesehen werden könne, wie dann diese Formel würcklich aus diesen zwey Factoren besteht $(x-5)\cdot(x-7)$. Wann dahero jene Formel soll 0 werden, so muß auch dieses Product $(x-5)\cdot(x-7) = 0$ seyn. Ein Product aber, aus so viel Factoren dasselbe auch immer bestehen mag, wird allezeit 0, wann nur einer von seinen Factoren 0 wird. Dann so groß auch das Product aus den übrigen Factoren seyn mag, wann dasselbe noch mit 0 multiplicirt wird, so kommt immer 0 heraus, welcher Grund-Satz für die höhern Gleichungen wohl zu bemercken ist.

131.

Hieraus begreift man nun gantz deutlich, daß dieses Product $(x-5)\cdot(x-7)$ auf eine doppelte Art 0 werden könne: einmahl nemlich wann der erste Factor $x - 5 = 0$ wird, und hernach auch, wann der andere Factor $x - 7 = 0$ wird. Das erstere geschiehet wann $x = 5$, das andere aber wann $x = 7$. Hieraus versteht man also den wahren Grund, warum eine solche Gleichung $xx - 12x + 35 = 0$ zweyerley Auflösungen zuläßt, oder für x zwey Werthe gefunden werden können, welche beyde der Gleichung ein Genügen leisten.

Der Grund besteht nemlich darinn, daß sich die Formel $xx - 12x + 35$ als ein Product aus zwey Factoren vorstellen läßt.

132.

Eben dieser Umstand findet bey allen Quadratischen Gleichungen statt. Dann wann alle Glieder auf eine Seite gebracht werden, so erhält man immer eine solche Formel $xx - ax + b = 0$; und diese Formel kann ebenfals als ein Product aus zwey Factoren angesehen werden, welche wir also vorstellen wollen $(x-p)(x-q)$ ohne uns darum zu bekümmern, was p und q vor Zahlen seyn mögen. Da nun unsere Gleichung erfordert, daß dieses Product gleich 0 werde, so ist offenbar, daß solches auf zweyerley Art geschehen könne: erstlich wann $x = p$, und zweytens wann $x = q$, welches die beyden Werthe für x sind, die der Gleichung ein Genüge leisten.

133.

Laßt uns nun sehen, wie diese zwey Factoren beschaffen seyn müßen, daß derselben Product just unsere Formel $xx - ax + b$ hervorbringe: man multiplicire demnach dieselben würcklich, so erhält man $xx - (p + q)\,x + pq$ welches, da es einerley seyn soll mit $xx - ax + b$, so ist klar daß seyn muß $p + q = a$ und $pq = b$, woraus wir diese herrliche Eigenschaft erkennen, daß von einer solchen Gleichung $xx - ax + b = 0$ die beyden Werthe für x also beschaffen sind, daß erstlich ihre Summe gleich sey der Zahl a und ihr Product der Zahl b. Dahero so bald man einen Werth erkennt, so ist auch leicht der andere zu finden.

134.

Dieses war der Fall, wann beyde Werthe für x Positiv sind, da dann in der Gleichung das zweyte Glied das Zeichen —, das dritte aber das Zeichen + hat. Wir wollen dahero auch die Fälle erwegen, worinnen einer von den beyden Werthen für x, oder auch alle beyde negativ werden. Jenes geschiehet wann die beyden Factoren der Gleichung also beschaffen sind: $(x - p)(x + q)$; woher diese zwey Werthe für x entspringen, erstlich $x = p$ und zweytens $x = -q$. Die Gleichung selbst aber ist alsdann $xx + (q - p)\,x - pq = 0$, wo das zweyte Glied das Zeichen + hat wann nemlich q größer ist als p; wäre aber q kleiner als p so hätte es das Zeichen —, das dritte Glied aber ist hier immer negativ.

Wären aber die beyden Factoren $(x + p)(x + q)$ so wären beyde Werthe für x negativ, nemlich $x = -p$ und $x = -q$ und die Gleichung selbst würde seyn $xx + (p + q)\,x + pq = 0$, wo sowohl das zweyte als das dritte Glied das Zeichen + haben.

135.

Hieraus erkennen wir nun die Beschaffenheit der Wurzeln einer jeglichen Quadratischen Gleichung aus dem Zeichen des zweyten und dritten Gliedes. Es sey die Gleichung $xx \cdots ax \cdots b = 0$; wann nun das zweyte und dritte Glied das Zeichen + haben, so sind beyde Werthe negativ; ist das zweyte Glied —, das dritte aber $+$, so sind beyde Werthe positiv; ist aber das dritte Glied negativ, so ist ein Werth positiv. Allezeit aber enthält das zweyte Glied die Summe der beyden Werthe, und das dritte ihr Product.

136.

Anjetzo ist es gantz leicht solche Quadratische Gleichungen zu machen, welche nach Belieben zwey gegebene Werthe in sich enthalten: man verlangt z. E. eine solche Gleichung, wo der eine Werth für x seyn soll 7, der andere aber -3. Man mache daraus diese einfache Gleichungen $x = 7$ und $x = -3$; hieraus ferner diese $x - 7 = 0$ und $x + 3 = 0$, welches die Factoren der verlangten Gleichung seyn werden; also daß die Gleichung seyn wird: $xx - 4x - 21 = 0$, woraus auch nach der obigen Regel eben diese beyde Werthe für x gefunden werden. Dann da $xx = 4x + 21$, so wird $x = 2 \pm \sqrt{25}$, also $x = 2 \pm 5$, also entweder $x = 7$ oder $x = -3$.

137.

Es kann auch geschehen, daß beyde Werthe für x einander gleich werden; man suche nemlich eine Gleichung wo beyde Werthe für x sind $x = 5$; die beyde Factoren werden also seyn $(x - 5)(x - 5)$ und die Gleichung ist also beschaffen $xx - 10x + 25 = 0$, welche scheinet nur einen Werth zu haben, weil auf eine doppelte Art wird $x = 5$, wie auch die gewöhnliche Auflösung zeigt. Dann da $xx = 10x - 25$, so wird $x = 5 \pm \sqrt{0}$, oder $x = 5 \pm 0$ und daher wird $x = 5$ und $x = 5$.

138.

Insonderheit ist hier noch zu mercken, daß bisweilen beyde Werthe für x imaginär oder unmöglich werden, in welchen Fällen es gantz und gar unmöglich ist, einen solchen Werth für x anzuzeigen welcher der Gleichung ein Genüge leistet, wie z. E. geschiehet, wann die Zahl 10 in zwey solchen Theile zertheilt werden soll, deren Product 30 sey: dann es sey ein Theil $= x$ so wird der andere seyn $10 - x$ und also ihr Product $10x - xx = 30$, folglich $xx = 10x - 30$ und $x = 5 \pm \sqrt{-5}$, welches eine imaginäre oder unmögliche Zahl ist und zu erkennen giebt, daß die Frage unmöglich sey.

139.

Es ist demnach sehr wichtig ein Kennzeichen auszufinden, woraus man sogleich erkennen kann, ob eine Quadratische Gleichung möglich sey oder nicht.

Es sey dahero diese allgemeine Gleichung gegeben:

$$xx - ax + b = 0, \quad \text{so wird} \quad xx = ax - b \quad \text{und} \quad x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}aa - b\right)};$$

woraus erhellet, daß wann die Zahl b größer ist als $\frac{1}{4}aa$, oder $4b$ größer als aa, die beyden Werthe unmöglich werden, weil man aus einer negativen Zahl die Quadrat-Wurzel ausziehen müßte. So lange aber hingegen b kleiner ist als $\frac{1}{4}aa$, oder auch gar kleiner als 0, das ist negativ, so sind die beyde Werthe immer möglich. Dieselben mögen inzwischen möglich seyn oder unmöglich, so können sie doch nach dieser Art allezeit ausgedrückt werden, und haben auch immer diese Eigenschaft, daß ihre Summe ist $= a$ und ihr Product $= b$, wie in diesem Exempel zu ersehen $xx - 6x + 10 = 0$, wo die Summe der beyden Werthe für x seyn muß $= 6$ und das Product $= 10$. Man findet aber diese beyden Werthe: I.) $x = 3 + \sqrt{-1}$ und II.) $x = 3 - \sqrt{-1}$, deren Summe $= 6$ und ihr Product $= 10$ ist.

140.

Man kann dieses Kennzeichen auf eine allgemeinere Art ausdrücken, daß es auch auf solche Gleichungen angewant werden kann $fxx \pm gx + h = 0$: dann hieraus hat man $xx = \mp \frac{gx}{f} - \frac{h}{f}$ dahero

$$x = \mp \frac{g}{2f} \pm \sqrt{\left(\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f}\right)}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{\mp g \pm \sqrt{(gg - 4fh)}}{2f},$$

woraus erhellet, daß beyde Werthe imaginär oder die Gleichung unmöglich werde, wann $4fh$ größer ist als gg, oder wann in dieser Gleichung $fxx \pm gx + h = 0$ das vierfache Product aus dem ersten und letzten Glied größer ist, als das Quadrat des zweyten Glieds. Dann das vierfache Product aus dem ersten und letzten Glied ist $4fhxx$, das Quadrat aber des mittlern Glieds ist $ggxx$: wann nun $4fhxx$ größer als $ggxx$, so ist auch $4fh$ größer als gg und also die Gleichung unmöglich; in allen übrigen Fällen aber ist die Gleichung möglich und die beyden Werthe für x können würcklich angegeben werden, wann dieselben gleich auch öfters irrational werden, in welchen Fällen man immer näher zu ihrem wahren Werth gelangen kann, wie oben bemercket worden; dahingegen bey imaginären Ausdrücken als $\sqrt{-5}$ auch keine Näherung statt findet, indem 100 davon eben so weit entfernt ist als 1 oder irgend eine andere Zahl.

141.

Hierbey ist noch zu erinnern, daß eine jegliche solche Formel vom zweyten Grad $xx \pm ax \pm b$ nothwendig allezeit in zwey solche Factores

$$(x \pm p)(x \pm q)$$

aufgelöst werden kann. Dann wann man drey solche Factoren nehmen wollte, so würde man zum dritten Grad kommen, und nur einer allein würde nicht zum zweyten Grad ansteigen. Dahero es eine ausgemachte Sache ist, daß eine jede Gleichung vom zweyten Grad nothwendig zwey Werthe für x in sich enthalte, und daß derselben weder mehr, noch weniger, seyn können.

142.

Man hat schon gesehen, daß wann diese beyden Factores gefunden worden, man daraus auch die beyden Werthe für x anzeigen kann; indem ein jeder Factor, wann er gleich 0 gesetzt wird, einen Werth für x angiebt. Dieses findet auch umgekehrt statt, daß so bald man einen Werth für x gefunden, daraus auch ein Factor der Quadratischen Gleichung erkannt werde. Dann wann $x = p$ ein Werth für x in einer Quadratischen Gleichung ist, so ist auch $x - p$ ein Factor derselben: oder die Gleichung, wann alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, läßt sich durch $x - p$ theilen, und der Quotient giebt den andern Factor.

143.

Um dieses zu erläutern so sey diese Gleichung gegeben:

$$xx + 4x - 21 = 0,$$

von welcher wir wißen, daß $x = 3$ ein Werth für x sey, indem

$$3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 21 = 0$$

ist, und daher können wir sicher schließen, daß $x - 3$ ein Factor dieser Gleichung sey, oder daß sich $xx + 4x - 21$ durch $x - 3$ theilen laße, wie aus dieser Division zu ersehen

$$\begin{array}{rl} x - 3) & xx + 4x - 21 \quad (x + 7 \\ & \underline{xx - 3x} \\ & \qquad 7x - 21 \\ & \qquad \underline{7x - 21} \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

Also ist der andere Factor $x + 7$ und unsere Gleichung wird durch dieses Product vorgestellt $(x - 3)(x + 7) = 0$ woraus die beyden Werthe für x sogleich erhellen, da nemlich aus dem ersten Factor $x = 3$ aus dem andern aber $x = -7$ wird.

CAPITEL 10

VON DER AUFLÖSUNG DER REINEN CUBISCHEN GLEICHUNGEN

144.

Eine reine Cubische Gleichung wird genennt wann der Cubus der unbekanten Zahl einer bekanten Zahl gleich gesetzt wird, also daß darinn weder das Quadrat der unbekanten Zahl, noch dieselbe selbst vorkommt.

Eine solche Gleichung ist $x^3 = 125$, oder auf eine allgemeine Art $x^3 = a$, oder $x^3 = \frac{a}{b}$.

145.

Wie nun aus einer solchen Gleichung der Werth von x gefunden werden soll, ist für sich offenbahr, indem man nur nöthig hat beyderseits die Cubic-Wurzel auszuziehen.

Also aus der Gleichung $x^3 = 125$ findet man $x = 5$, und aus der Gleichung $x^3 = a$ bekommt man $x = \sqrt[3]{a}$; aus $x^3 = \frac{a}{b}$ aber hat man

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad \text{oder} \quad x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Wann man dahero nur gelernet hat die Cubic-Wurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen, so kann man auch solche Gleichungen auflösen.

146.

Solcher Gestalt erhält man aber nur einen Werth für x, da nun eine jegliche Quadratische Gleichung zwey Werthe hat, so hat man Grund zu vermuthen, daß eine Cubische Gleichung auch mehr als einen Werth haben müße, dahero wird es der Mühe werth seyn, diese Sache genauer zu untersuchen, und im Fall eine solche Gleichung mehr Werthe für x haben sollte, dieselben auch ausfündig zu machen.