$2x$ Rthl. folglich gewinnt er $\frac{1}{5}x^3$ mit dem gantzen Capital $10xx$. Der $\frac{1}{100}$ Theil dieses Gewinnsts ist demnach $\frac{1}{500}x^3$, welcher mit $2\frac{2}{9}$, das ist mit $\frac{20}{9}$ multiplicirt, giebt $\frac{20}{4500}x^3$, oder $\frac{1}{225}x^3$ welches der Zahl der Gesellen x gleich seyn muß.

Also hat man diese Gleichung $\frac{1}{225}x^3 = x$, oder $x^3 = 225x$, welche Cubisch zu seyn scheinet, weil man aber durch x dividiren kann, so kommt diese Quadratische heraus $xx = 225$ und $x = 15$.

Antwort: es sind dahero in allen 15 Gesellen gewesen und ein jeder hat 150 Rthl. eingelegt.

CAPITEL 6

VON DER AUFLÖSUNG DER VERMISCHTEN QUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

76.

Eine vermischte Quadratische Gleichung wird genennt, wann in derselben dreyerley Glieder vorkommen, nemlich solche, welche das Quadrat der unbekanten Zahl enthalten, wie axx; hernach auch solche, worinn die unbekante Zahl selbst vorkommt, als bx, und endlich solche Glieder, welche blos aus bekanten Zahlen zusammengesetzt sind. Da nun zwey oder mehr Glieder von einer Art in eins zusammen gezogen werden, und alle auf eine Seite des Zeichens $=$ gebracht werden können, so wird die Form dieser Gleichung also beschaffen seyn:

$$axx \mp bx \mp c = 0.$$

Wie nun aus solchen Gleichungen der Werth von x gefunden werden soll, wird in diesem Capitel gezeigt werden, zu welchem Ende zweyerley Wege führen.

77.

Eine solche Gleichung kann durch die Theilung also eingerichtet werden, daß das erste Glied blos allein das reine Quadrat der unbekanten Zahl xx enthalte; hernach laße man das zweyte Glied auf eben der Seite wo xx steht, das bekante Glied aber bringe man auf die andere Seite. Solcher Gestalt wird unsere Gleichung diese Form bekommen $xx \pm px = \pm q$, wo p und q bekante Zahlen, sowohl positive als negative andeuten; und jetzo kommt alles darauf an, wie der wahre Werth von x gefunden werden soll. Hierbey ist zuerst zu bemercken, daß wann $xx + px$ ein würckliches Quadrat wäre, die Auflösung keine Schwierigkeit haben würde, weil man nur nöthig hätte beyderseits die Quadrat-Wurzel zu nehmen.

78.

Es ist aber klar, daß $xx + px$ kein Quadrat seyn kann, weil wir oben gesehen, daß wann die Wurzel aus zwey Gliedern besteht, z. E. $x + n$, das Quadrat davon drey Glieder enthalte, nemlich außer dem Quadrat eines jeden Theils, noch das doppelte Product beyder Theile, also daß das Quadrat von $x + n$ seyn wird $xx + 2nx + nn$. Da wir nun auf einer Seite schon haben $xx + px$ so können wir xx als das Quadrat des ersten Theils der Wurzel ansehen, und da muß px das doppelte Product des ersten Theils der Wurzel x mit dem andern Theil seyn; dahero der andere Theil $\frac{1}{2}p$ seyn muß, wie dann auch in der That das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p$ gefunden wird $xx + px + \frac{1}{4}pp$.

79.

Da nun $xx + px + \frac{1}{4}pp$ ein würckliches Quadrat ist, wovon die Wurzel $x + \frac{1}{2}p$, so dürfen wir nur bey unserer Gleichung zu $xx + px = q$ beyderseits $\frac{1}{4}pp$ addiren und da bekommen wir $xx + px + \frac{1}{4}pp = q + \frac{1}{4}pp$, wo auf der ersten Seite ein würckliches Quadrat, auf der andern aber blos bekante Zahlen befindlich sind. Wann wir dahero beyderseits die Quadrat-Wurzel nehmen, so erhalten wir $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{\left(\frac{1}{4}pp + q\right)}$; subtrahirt man nun $\frac{1}{2}p$, so erhält man $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\left(\frac{1}{4}pp + q\right)}$; und da eine jede Quadrat-Wurzel so wohl Positiv als Negativ genommen werden kann, so findet man für x zwey Werthe, welche also durch diese Form ausgedrückt zu werden pflegen:

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}pp + q\right)}.$$

80.

In dieser Formel ist nun die Regel enthalten, nach welcher alle Quadrat-Gleichungen aufgelößt werden können, und damit man nicht immer nöthig habe, die obige Operation von neuem anzustellen, so ist genung, daß man den Inhalt dieser Formel dem Gedächtniß wohl einpräge. Man kann demnach die Gleichung so anordnen, daß das bloße Quadrat xx auf einer Seite zu stehen komme, daher die obige Gleichung diese Form erhalten wird:

$$xx = -px + q$$

wovon der Werth von x so gleich also hingeschrieben werden kann:

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}pp + q\right)}.$$

81.

Hieraus wird nun diese allgemeine Regel gezogen um die Gleichung

$$xx = -px + q$$

aufzulösen.

Man sieht nemlich, daß die unbekante Zahl x gleich seyn werde der Hälfte der Zahl, womit x auf der andern Seite multiplicirt ist, und über das noch $+$ oder $-$ der Quadrat-Wurzel aus dem Quadrat der Zahl, so eben geschrieben worden, nebst der bloßen Zahl so das dritte Glied der Gleichung ausmacht.

Wann dahero diese Gleichung vorkäme $xx = 6x + 7$, so würde man so gleich haben $x = 3 \pm \sqrt{(9 + 7)} = 3 \pm 4$: folglich sind die beyden Werthe von x

I.) $x = 7$, und II.) $x = -1$.

Hätte man diese Gleichung $xx = 10x - 9$, so wird $x = 5 \pm \sqrt{(25 - 9)}$, welches $= 5 \pm 4$; dahero die beyden Werthe seyn werden $x = 9$ und $x = 1$.

82.

Zu mehrerer Erläuterung dieser Regel können folgende Fälle unterschieden werden, I.) wann p eine gerade Zahl ist, II.) wann p eine ungerade Zahl ist, und III.) wann p eine gebrochene Zahl ist.

Es sey I.) p eine gerade Zahl und die Gleichung also beschaffen:

$xx = 2px + q$, so bekommt man $x = p \pm \sqrt{(pp + q)}$.

Es sey II.) p eine ungerade Zahl und die Gleichung $xx = px + q$, da dann seyn wird

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}pp + q\right)}$$

da nun $\frac{1}{4}pp + q = \frac{pp+4q}{4}$, aus dem Nenner 4 aber die Quadrat-Wurzel gezogen werden kann, so bekommt man

$$x = \frac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{(pp+4q)}}{2}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{p + \sqrt{(pp \pm 4q)}}{2}.$$

Wird aber III.) p ein Bruch, so kann die Auflösung folgender Gestalt geschehen. Es sey die Quadratische Gleichung

$$axx = bx + c, \quad \text{oder} \quad xx = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a},$$

so wird nach der Regel

$$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a}\right)}. \quad \text{Da nun aber} \quad \frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a} = \frac{bb+4ac}{4aa}$$

und hier der Nenner ein Quadrat ist, so wird

$$x = \frac{b \pm \sqrt{(bb+4ac)}}{2a}.$$

83.

Der andere Weg welcher auch zu dieser Auflösung führet, bestehet darinn, daß man eine solche vermischte Quadratische Gleichung nemlich:

$$xx = px + q$$

in eine reine verwandele, welches geschiehet, wann man anstatt der unbekanten Zahl x eine andere y in die Rechnung einführet, also daß

$$x = y + \frac{1}{2}p;$$

da man dann, wann y gefunden worden, auch so gleich den Werth vor x erhält.

Schreibt man nun $y + \frac{1}{2}p$ anstatt x, so wird $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$ und $px = py + \frac{1}{2}pp$: hieraus wird unsere Gleichung also zu stehen kommen:

$$yy + py + \frac{1}{4}pp = py + \frac{1}{2}pp + q;$$

subtrahirt man hier erstlich py, so hat man $yy + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{2}pp + q$, ferner $\frac{1}{4}pp$ subtrahirt, giebt $yy = \frac{1}{4}pp + q$, welches eine reine Quadratische Gleichung ist, woraus man so gleich erhält $y = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}pp + q\right)}$.

Da nun $x = y + \frac{1}{2}p$, so wird $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}pp + q\right)}$, wie wir schon oben gefunden haben. Es ist also nichts mehr übrig als diese Regel mit Exempeln zu erläutern.

84.

I. Frage: Ich habe zwey Zahlen; die eine ist um 6 größer als die andere und ihr Produkt macht 91, welches sind diese Zahlen?

Die kleinere Zahl sey x, so ist die größere $x + 6$ und ihr Product

$$xx + 6x = 91.$$

Man subtrahire $6x$, so hat man $xx = -6x + 91$, und nach der Regel

$$x = -3 \pm \sqrt{(9 + 91)} = -3 \pm 10,$$

dahero hat man entweder $x = 7$ oder $x = -13$.

Antwort: die Frage hat also zwey Auflösungen: nach der ersten ist die kleinere Zahl $x = 7$ die größere $x + 6 = 13$. Nach der andern aber ist die kleinere $x = -13$ und die größere $x + 6 = -7$.

85.

II. Frage: Suche eine Zahl wann ich von ihrem Quadrat subtrahire 9, daß gleich so viel über 100 bleiben als meine Zahl weniger ist als 23; welche Zahl ist es?

Es sey die Zahl x, so ist $xx - 9$ über 100 um $xx - 109$. Die gesuchte Zahl x aber ist unter 23 um $23 - x$; woraus diese Gleichung entsteht

$$xx - 109 = 23 - x.$$

Man addire 109 so wird $xx = -x + 132$ folglich nach der Regel

$$x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} + 132\right)} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{529}{4}} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{23}{2}.$$

Also ist entweder $x = 11$, oder $x = -12$.

Antwort: Wann nur eine positive Antwort verlangt wird, so ist die gesuchte Zahl 11 deren Quadrat weniger 9 macht 112, so um 12 größer ist als 100, und die gefundene Zahl ist um eben so viel kleiner als 23.

86.

III. Frage: Suche eine Zahl wann ich ihre Hälffte mit ihrem Drittel multiplicire und zum Product $\frac{1}{2}$ der gefundenen Zahl addire, daß 30 kommen?

Es sey diese Zahl x, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt $\frac{1}{6}xx$ giebt; allso soll $\frac{1}{6}xx + \frac{1}{2}x = 30$ seyn; mit 6 multiplicirt, wird $xx + 3x = 180$, oder $xx = -3x + 180$, woraus man findet

$$x = -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{9}{4} + 180\right)} = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{27}{2}.$$

Dahero ist entweder $x = 12$ oder $x = -15$.

87.

IV. Frage: Suche zwey Zahlen in Proportione Dupla, wann ich ihre Summe zu ihrem Product addire, daß 90 komme?

Es sey die Zahl x, so ist die größere $2x$, ihr Product $2xx$, dazu ihre Summe $3x$ addirt soll geben 90. Also $2xx + 3x = 90$, und $3x$ subtrahirt,

$$2xx = -3x + 90$$

durch 2 dividirt, giebt $xx = -\frac{3}{2}x + 45$; woraus nach der Regel gefunden wird

$$x = -\tfrac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\tfrac{9}{16} + 45\right)} = -\tfrac{3}{4} \pm \tfrac{27}{4}.$$

Dahero ist entweder $x = 6$ oder $x = -7\frac{1}{2}$.

88.

V. Frage: Einer kauft ein Pferd für etliche Rthl. verkauft dasselbe wieder für 119 Rthl. und gewinnt daran von 100 so viel Rthl. als das Pferd gekostet, ist die Frage wie theuer daßelbe eingekauft worden?

Das Pferd habe gekostet x Rthl. weil er nun darauf x Proc. gewonnen, so setze man: mit 100 gewinnt man x, wie viel mit x? Antwort $\frac{xx}{100}$. Da er nun $\frac{xx}{100}$ gewonnen, der Einkauf aber x gewesen, so muß er dasselbe für $x + \frac{xx}{100}$ verkauft haben. Dahero wird $x + \frac{xx}{100} = 119$.

Man subtrahire x, so kommt $\frac{xx}{100} = -x + 119$ und mit 100 multiplicirt, wird $xx = -100x + 11900$, woraus nach der Regel gefunden wird

$$x = -50 \pm \sqrt{(2500 + 11900)} = -50 \pm \sqrt{14400} = -50 \pm 120.$$

Antwort: das Pferd hat also gekostet 70 Rthl. weil er nun darauf 70 Procent gewonnen, so war der Gewinst 49 Rthl. er muß also dasselbe verkauft haben vor $70 + 49$, das ist für 119 Rthl. wie würcklich geschehen.

89.

VI. Frage: Einer kauft eine gewiße Anzahl Tücher: das erste für 2 Rthl. das zweyte für 4 Rthl. das dritte für 6 Rthl. und immer 2 Rthl. mehr für das folgende, bezahlt für alle Tücher 110 Rthl. Wie viel sind der Tücher gewesen?

Es seyen x Tücher gewesen, und wie viel er für jedes bezahlt hat, zeiget die folgende Vorstellung an:

$$\begin{array}{ll} \text{für das} & 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ldots\ x. \\ \text{zahlt er} & 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\ldots 2x \ \text{Rthl.} \end{array}$$

Man muß also diese Arithmetische Progression $2+4+6+8+10+\cdots 2x$ welche aus x Gliedern besteht summiren, um den Preis aller Tücher zusammen zu finden.

Nach der oben gegebenen Regel also addire man das erste und letzte Glied zusammen, so bekommt man $2x+2$. Dieses multiplicire man mit der Anzahl der Glieder x, so bekommt man die doppelte Summe $2xx+2x$. Dahero die Summe selbst seyn wird $xx+x$, welche dem 110 gleich seyn muß, oder $xx+x=110$.

Man subtrahire x, so wird $xx=-x+110$ folglich

$$x=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}+110\right)} \quad \text{oder} \quad =-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{441}{4}}$$

oder
$$x=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{21}{2}=10.$$

Antwort: Es sind 10 Stück Tücher gekauft worden.

90.

VII. Frage: Einer kauft etliche Tücher für 180 Rthl. wären der Tücher 3 mehr gewesen vor eben das Geld, so wäre ihm das Stück um 3 Rthl. wohlfeiler gekommen. Wie viel sind es Tücher gewesen?

Es seyen x Tücher gewesen, so hat das Stück würcklich gekostet $\frac{180}{x}$ Rthl. Hätte er aber $x+3$ Stück für 180 Rthl. bekommen, so würde das Stück gekostet haben $\frac{180}{x+3}$ Rthl. welcher Preis um 3 Rthl. weniger ist, als der würckliche, woraus diese Gleichung entsteht: $\frac{180}{x+3}=\frac{180}{x}-3$.

Man multiplicire mit x, so kommt $\frac{180x}{x+3} = 180 - 3x$, durch 3 dividirt, giebt $\frac{60x}{x+3} = 60 - x$, mit $x + 3$ multiplicirt, wird $60x = 180 + 57x - xx$, man addire xx, so kommt $xx + 60x = 180 + 57x$. Man subtrahire $60x$, so kommt $xx = -3x + 180$. Hieraus nach der Regel

$$x = -\tfrac{3}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{9}{4} + 180\right)}, \quad \text{oder} \quad x = -\tfrac{3}{2} + \tfrac{27}{2} = 12.$$

Antwort: Also sind 12 Tücher für 180 Rthl. gekauft worden, dahero eines gekostet 15 Rthl. Hätte man aber 3 Stück mehr nemlich 15 Stück für 180 Rthl. bekommen, so wird 1 Stück gekostet haben 12 Rthl., folglich 3 Rthl. weniger als in der That.

91.

VIII. Frage: Zwey haben eine Gesellschaft, legen zusammen 100 Rthl. ein, der erste läßt sein Geld 3 Monath lang, der andere aber 2 Monath lang stehen, und zieht ein jeder mit Capital und Gewinst 99 Rthl. wie viel hat jeder eingelegt?

Der erste habe eingelegt x Rthl. und also der andere $100 - x$; da nun der erste 99 Rthl. zurück zieht, so ist sein Gewinn $99 - x$, welcher in 3 Monathen mit dem Capital x ist erworben worden, da der andere auch 99 Rthl. zurück zieht, so war sein Gewinn $x - 1$, welcher in zwey Monathen mit dem Capital $100 - x$ erworben worden; mit eben diesem Capital $100 - x$ würden also in drey Monathen gewonnen werden $\frac{3x-3}{2}$. Nun sind diese Gewinste denen Capitalen proportional, nemlich jenes Capital verhält sich zu jenem Gewinst, wie dieses Capital zu diesem Gewinst; also

$$x : 99 - x = 100 - x : \frac{3x-3}{2}.$$

Man setze das Product der äußern gleich dem Product der mittlern, so hat man $\frac{3xx - 3x}{2} = 9900 - 199x + xx$ und mit 2 multiplicirt

$$3xx - 3x = 19800 - 398x + 2xx;$$

man subtrahire $2xx$ so kommt $xx - 3x = 19800 - 398x$ und $3x$ addirt

$$xx = -395x + 19800.$$

Dahero nach der Regel

$$x = -\tfrac{395}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{156025}{4} + \tfrac{79200}{4}\right)} \quad \text{das ist} \quad x = -\tfrac{395}{2} + \tfrac{485}{2} = \tfrac{90}{2} = 45.$$

Antwort: der erste hat also eingelegt 45 Rthl. und der andere 55 Rthl. mit den 45 Rthl. hat der erste in 3 Monath gewonnen 54 Rthl. würde demnach in einem Monath gewonnen haben 18 Rthl. Der andere aber gewinnt mit 55 Rthl. in 2 Monath 44 Rthl. würde also in einem Monath gewonnen haben 22 Rthl. welches auch mit jenem übereinstimmt; dann wann mit 45 Rthl. gewonnen werden 18 in einem Monath, so werden mit 55 in gleicher Zeit gewonnen 22 Rthl.

92.

IX. Frage: Zwey Bäurinnen tragen zusammen 100 Eyer auf den Marckt, eine mehr als die andere, und lösen doch beyde gleich viel Geld. Spricht die erste zu der andern: hätte ich deine Eyer gehabt, so hätte ich 15 Kreuzer gelößt; darauf antwortet die andere: hätte ich deine Eyer gehabt, so hätte ich daraus $6\frac{2}{3}$ Kreutzer gelößt; wie viel hat jede gehabt?

Die erste habe gehabt x Eyer und also die andere $100 - x$.

Also da nun die erste $100 - x$ Eyer für 15 Kreuzer verkauft haben würde, so setze man diese Regeldetri

$$100 - x : 15 = x \text{ zu} \ldots \quad \text{Antwort } \frac{15x}{100 - x} \text{ Kreuzer.}$$

Eben so bey der andern welche x Eyer für $6\frac{2}{3}$ Kreuzer verkauft haben würde, findet man wie viel sie aus ihren $100 - x$ Eyer gelöset,

$$x : \frac{20}{3} = 100 - x \text{ zu} \ldots \quad \text{Antwort } \frac{2000 - 20x}{3x}.$$

Da nun die beyden Bäurinnen gleich viel gelöset haben, so finden wir diese Gleichung:

$$\frac{15x}{100 - x} = \frac{2000 - 20x}{3x},$$

mit $3x$ multiplicirt, kommt $2000 - 20x = \frac{45xx}{100 - x}$, mit $100 - x$ multiplicirt, $45xx = 200000 - 4000x + 20xx$, $20xx$ subtrahirt, $25xx = 200000 - 4000x$, durch 25 dividirt $xx = -160x + 8000$, dahero nach der Regel

$$x = -80 + \sqrt{(6400 + 8000)} = -80 + 120 = 40.$$

Antwort: die erste Bäurin hat also gehabt 40 Eyer, die andere 60 Eyer und hat eine jede 10 Kreuzer gelöset.

93.

X. Frage: Zwey verkauffen etliche Ellen Zeug, der andere 3 Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35 Rthl. Spricht der erste zum andern: aus deinem Zeug wollt ich gelöset haben 24 Rthl. antwortet der andere: so hätte ich aus deinem gelößet $12\frac{1}{2}$ Rthl. wie viel hat jeder Ellen gehabt?

Der erste habe gehabt x Ellen, folglich der andere $x+3$ Ellen. Da nun der erste aus $x+3$ El. 24 Rthl. gelöst hätte, so muß er seine x Ellen verkauft haben vor $\frac{24x}{x+3}$ Rthl. und da der andere x Ellen verkauft hätte für $12\frac{1}{2}$ Rthl. so hatte er seine $x+3$ Ellen verkauft vor $\frac{25x+75}{2x}$ und so haben beyde zusammen gelöst $\frac{24x}{x+3}+\frac{25x+75}{2x}=35$ Rthl. Allso

$$\frac{48xx}{x+3}+25x+75=70x \quad \text{oder} \quad \frac{48xx}{x+3}=45x-75,$$

mit $x+3$ multiplicirt wird $48xx=45xx+60x-225$, subtrahirt $45xx$, so hat man $3xx=60x-225$ oder $xx=20x-75$.

Hieraus wird

$$x=10\pm\sqrt{(100-75)}=10\pm\sqrt{25}, \quad \text{also} \quad x=10\pm 5.$$

Antwort: Es giebt daher zwey Auflößungen. Nach der ersten hat der erste 15 Ellen, und der andere 18 Ellen; weil nun der erste 18 Ellen verkauft hätte vor 24 Rthl. so hat er aus seinen 15 Ellen gelöst 20 Rthl. Der andere aber hätte aus 15 Ellen gelöset $12\frac{1}{2}$ Rthl. hat also aus seinen 18 Ellen gelöst 15 Rthl. also beyde zusammen 35 Rthl.

Nach der andern Auflösung hat der erste gehabt 5 Ellen, folglich allso der andere 8 Ellen, allso der erste hätte verkauft 8 Ellen für 24 Rthl. und hat also aus seinen 5 Ellen gelöst 15 Rthl. Der andere hätte 5 Ellen verkauft für $12\frac{1}{2}$ Rthl. hat also aus seinen 8 Ellen gelöst 20 Rthl. folglich beyde zusammen eben wieder 35 Rthl.