Man setze nun, die Zahl der Schweitzer sey gewesen x Köpfe, der Schwaben y und der Sachsen z. Ferner setze man die Anzahl aller $x+y+z=s$ weil leicht vorher zu sehen, daß dadurch die Rechnung gar sehr erleichtert wird. Dann wann die Schweitzer den Sturm thun, deren Anzahl $=x$, so ist die Zahl der beyden übrigen $=s-x$, da nun jene 1 Rthl. diese aber einen halben Rthl. bekommen, so wird $x+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}x=901$. Eben so wann die Schwaben Sturm lauffen, so wird $y+\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}y=901$, und endlich wann die Sachsen Sturm lauffen, so wird $z+\frac{1}{4}s-\frac{1}{4}z=901$ seyn. Aus welchen drey Gleichungen ein jeder der drey Buchstaben x, y und z bestimmt werden kann.

Dann aus der ersten erhält man $x=1802-s$, aus der andern $2y=2703-s$, aus der dritten $3z=3604-s$.

Nun schreibe man dieselben unter einander; suche aber erstlich die Werthe von $6x$, $6y$, und $6z$.

$$\begin{aligned} 6x &= 10812-6s \\ 6y &= 8109-3s \\ 6z &= 7208-2s \\ \hline \text{addirt: } 6s &= 26129-11s \quad \text{oder} \quad 17s=26129 \end{aligned}$$

woraus gefunden wird $s=1537$ welches die Anzahl aller Köpfe ist und daraus findet man ferner:

$$\begin{aligned} x &= 1802-1537 = 265 \\ 2y &= 2703-1537=1166 \text{ und } y=583 \\ 3z &= 3604-1537=2067 \text{ und } z=689 \end{aligned}$$

Antwort: die Compagnie der Schweitzer bestand also aus 265 Mann, die Schwaben aus 583, und die Sachsen aus 689 Mann.

CAPITEL 5

VON DER AUFLÖSUNG DER REINEN QUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

61.

Eine Gleichung wird Quadratisch genennt, wann darin das Quadrat oder die zweyte Potestät der unbekanten Zahl vorkommt, wann sich nur keine höhere Potestäten davon darinn befinden. Dann sollte darin auch die dritte

Potestät vorkommen so wird eine solche Gleichung schon zu den Cubischen gerechnet, wovon die Auflösung besondere Regeln erfordert.

62.

In einer Quadratischen Gleichung kommen also nur dreyerley Glieder vor:

Zum ersten solche Glieder worinnen die unbekante Zahl gar nicht enthalten ist, oder welche blos allein aus bekanten Zahlen zusammen gesetzt sind.

Zweytens solche Glieder, in welchen nur die erste Potestät der unbekanten Zahl vorkommt.

Und drittens solche, in welchen das Quadrat der unbekanten Zahl enthalten ist.

Also wann x die unbekante Zahl andeutet, die Buchstaben a, b, c, d etc. aber bekante Zahlen vorstellen, so haben die Glieder der ersten Art diese Form a, von der zweyten Art haben die Glieder die Form bx, und die Glieder der dritten Art haben die Form cxx.

63.

Man hat schon zur Gnüge gesehen, daß zwey oder mehr Glieder von einer Art, in ein einiges zusammen gezogen, oder als ein einiges Glied betrachtet werden können.

Also kann diese Form $axx - bxx + cxx$ als ein einziges Glied angesehen, und also vorgestellet werden $(a - b + c)xx$ weil in der That $a - b + c$ eine bekante Zahl ausdrückt.

Wann sich auch solche Glieder zu beyden Seiten des Zeichens $=$ befinden sollten, so hat man schon gesehen, wie dieselben auf eine Seite gebracht, und in eines zusammen gezogen werden können:

Also wann diese Gleichung vorkommt

$$2xx - 3x + 4 = 5xx - 8x + 11;$$

so subtrahirt man erstlich $2xx$, so kommt $-3x + 4 = 3xx - 8x + 11$; hernach addire man $8x$, so hat man $5x + 4 = 3xx + 11$, und 11 subtrahirt giebt $3xx = 5x - 7$.

64.

Man kann auch alle Glieder auf einer Seite des Zeichens $=$ bringen, so daß auf der anderen Seite 0 zu stehen kommt; wobey zu bemercken daß wann

Glieder von der einen Seite auf die andere gebracht werden, ihre Zeichen verändert werden müßen.

Also wird die obige Gleichung diese Form bekommen $3xx - 5x + 7 = 0$ und so wird auch insgemein eine jegliche Quadratische Gleichung durch diese Form vorgestellt werden können

$$axx \pm bx \pm c = 0$$

wo das Zeichen $\pm$ durch *plus oder minus* ausgesprochen wird, um anzuzeigen, daß solche Glieder bald Positiv bald Negativ seyn können.

65.

Es mag eine Quadratische Gleichung anfänglich aussehen wie sie will, so kann dieselbe doch immer auf diese Form, welche nur aus drey Gliedern bestehet, gebracht werden; wann man z. E. auf diese Gleichung gekommen wäre: $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ex+f}{gx+h}$ so müsten vor allen Dingen die Brüche gehoben werden. Also multiplicire man mit $cx + d$ so bekommt man $ax + b = \frac{cexx + cfx + edx + fd}{gx + h}$ hier mit $gx + h$ multiplicirt, giebt

$$agxx + bgx + ahx + bh = cexx + cfx + edx + fd$$

welches eine Quadratische Gleichung ist, und auf folgende drey Glieder gebracht werden kann, wann alle auf eine Seite gesetzt werden, und welche man also unter einander zu schreiben pfleget:

$$\begin{aligned} 0 = agxx &+ bgx + bh \\ -\, cexx &+ ahx - fd \\ &-\, cfx \\ &-\, edx \end{aligned}$$

oder um dieselbe noch deutlicher vorzustellen

$$0 = (ag - ce)\,xx + (bg + ah - cf - ed)\,x + bh - fd.$$

66.

Dergleichen Quadratische Gleichungen worin von allen dreyen Arten Glieder enthalten sind, werden vollständige genennt, und die Auflösung derselben ist auch mehr Schwierigkeiten unterworffen, daher wir erstlich solche Gleichungen betrachten wollen, in welchen eines von diesen dreyen Gliedern mangelt.

Sollte nun das Glied xx gar nicht vorhanden seyn, so wäre die Gleichung nicht einmahl Quadratisch und gehörte zu der vorigen Art; sollte aber das Glied, so blos bekante Zahlen enthält, mangeln, so würde die Gleichung also aussehen $axx \pm bx = 0$, wo man durch x theilen kann und daher zu dieser Gleichung kommt $ax \pm b = 0$, welche wieder eine einfache Gleichung ist und nicht hieher gehört.

67.

Wann aber das mittlere Glied, so nur die erste Potestät des x enthält, mangelt, so bekommt die Gleichung diese Form: $axx \pm c = 0$, oder $axx = c$, es mag nun c das Zeichen $+$ oder $-$ haben.

Eine solche Gleichung wird eine reine Quadratische genennt, weil ihre Auflösung keiner Schwierigkeit unterworfen ist. Dann man darf nur durch a theilen, so bekommt man $xx = \frac{c}{a}$; und beyderseits die Quadrat-Wurzel genommen, so hat man $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$; wodurch die Gleichung aufgelößt worden.

68.

Hier sind nun drey Fälle zu erwegen. Der erste, wann $\frac{c}{a}$ eine Quadrat-Zahl ist, davon sich die Wurzel würcklich anzeigen läßt; da erhält man den Werth von x durch eine Rational-Zahl ausgedrückt, dieselbe mag gantz oder gebrochen seyn.

Also aus dieser Gleichung $xx = 144$ bekommt man $x = 12$, und aus dieser $xx = \frac{9}{16}$ erhält man $x = \frac{3}{4}$.

Der zweyte Fall ist, wann $\frac{c}{a}$ keine Quadrat-Zahl ist, da man sich dann mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ begnügen muß.

Also wann $xx = 12$ so wird $x = \sqrt{12}$, wovon der Werth durch Näherung bestimmt werden kann, wie wir schon oben gezeigt haben.

Ist aber drittens $\frac{c}{a}$ gar eine Negativ-Zahl, so wird der Werth von x gantz und gar unmöglich oder Imaginär und zeiget an, daß die Frage welche auf eine solche Gleichung geführet, an sich unmöglich sey.

69.

Ehe wir weiter gehen ist noch zu bemercken, daß so oft aus einer Zahl die Quadrat-Wurzel gezogen werden muß, dieselbe allezeit einen doppelten Werth erhalte und so wohl Positiv als Negativ genommen werden könne, wie schon oben gezeigt worden.

Also wann man auf diese Gleichung kommt $xx = 49$ so ist der Werth von x nicht nur $+7$ sondern auch -7 und pflegt dahero also angedeutet zu werden: $x = \pm 7$, woraus erhellet, daß alle diese Fragen eine doppelte Auflösung zulaßen, in vielen Fällen aber wo etwann von einer Anzahl Menschen die Frage ist fält der Negativ-Werth von selbsten weg.

70.

Auch bey dem vorhergehenden Fall, wo die bloße Zahl mangelt, laßen die Gleichungen $axx = bx$ immer zweyerley Werthe vor x zu, ob gleich nur einer gefunden wird, wann man durch x dividirt. Dann wann z. E. diese Gleichung vorkommt $xx = 3x$ wo ein solcher Wert für x gegeben werden soll, daß xx dem $3x$ gleich werde, so geschieht dieses, wann man setzt $x = 3$ welcher Werth heraus kommt, wann man durch x dividirt, allein außer diesem leistet auch der Werth $x = 0$ ein genügen; dann da wird $xx = 0$ und $3x = 0$. Dieses ist bey allen Quadratischen Gleichungen zu mercken daß immer zwey Auflösungen statt finden, dahingegen bey den einfachen Gleichungen nie mehr als eine Platz hat.

Wir wollen nun diese reine Quadratische Gleichungen durch einige Exempel erläutern.

71.

I. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte mit ihren $\frac{1}{3}$ multiplicirt 24 gebe?

Es sey diese Zahl $= x$ so muß $\frac{1}{2}x$ mit $\frac{1}{3}x$ multiplicirt 24 werden, woraus diese Gleichung entspringt $\frac{1}{6}xx = 24$.

Mit 6 multiplicirt wird $xx = 144$ und Quadrat-Wurzel ausgezogen $x = \pm 12$. Dann wann $x = +12$, so ist $\frac{1}{2}x = 6$ und $\frac{1}{3}x = 4$, wovon das Product 24 ist. Ebenfals wann $x = -12$ so ist $\frac{1}{2}x = -6$ und $\frac{1}{3}x = -4$ und das Product davon auch 24.

72.

II. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, wann zu derselben erstlich 5 addirt und hernach auch 5 subtrahirt und die Summe mit dem Rest multiplicirt wird, 96 herauskomme?

Es sey diese Zahl x so muß $x + 5$ mit $x - 5$ multiplicirt 96 geben, woraus diese Gleichung entspringt $xx - 25 = 96$.

Man addire 25 so wird $xx = 121$ und die Quadrat-Wurzel ausgezogen $x = 11$, dann da wird $x + 5 = 16$ und $x - 5 = 6$. Nun aber ist $6 \cdot 16 = 96$.

73.

III. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, daß wann dieselbe erstlich zu 10 addirt, hernach auch von 10 subtrahirt, jene Summe mit diesem Rest multiplicirt 51 gebe?

Es sey die Zahl x so muß $10 + x$ mit $10 - x$ multiplicirt 51 geben, woraus diese Gleichung entsteht $100 - xx = 51$.

Man addire xx und subtrahire 51, so kommt $xx = 49$, wovon die Quadrat-Wurzel anzeigt $x = 7$.

74.

IV. Frage: Es haben drey Personen Geld, so oft der erste hat 7 Rthl. hat der andere 3 Rthl. und so oft der andere hat 17 Rthl. hat der dritte 5 Rthl., so ich aber das Geld des ersten mit dem Geld des andern, und das Geld des andern mit dem Geld des dritten und auch endlich das Geld des dritten mit dem Geld des ersten multiplicire, hernach diese drey Producte zusammen addire, so wird die Summe $3830\frac{2}{3}$ seyn. Wie viel Geld hat ein jeder gehabt?

Man setze, der erste habe gehabt x Rthl. und da gesagt wird, daß so oft der erste 7 Rthl. habe, so habe der andere 3 Rthl. so will dieses so viel sagen, daß das Geld des ersten sich zum Geld des andern verhalte wie $7:3$. Man setze also wie $7:3 = x$ zum Geld des andern, welches seyn wird $\frac{3}{7}x$. Da ferner das Geld des andern sich verhält zum Geld des dritten, wie $17:5$, so setze man wie $17:5 = \frac{3}{7}x$ zum Geld des dritten, welches seyn wird $\frac{15}{119}x$. Nun multiplicire man das Geld des ersten x mit dem Geld des andern $\frac{3}{7}x$ so wird das Product $= \frac{3}{7}xx$.

Ferner das Geld des andern $\frac{3}{7}x$ mit dem Geld des dritten $\frac{15}{119}x$ multiplicirt, giebt $\frac{45}{833}xx$.

Und endlich das Geld des dritten $\frac{15}{119}x$ mit dem Geld des ersten x multiplicirt, giebt $\frac{15}{119}xx$. Diese drey Producte zusammen machen

$$\frac{3}{7}xx + \frac{45}{833}xx + \frac{15}{119}xx,$$

welche unter einen Nenner gebracht, geben $\frac{507}{833}xx$, so der Zahl $3830\frac{2}{3}$ gleich gesetzt werden muß.

Also hat man $\frac{507}{833}xx = 3830\frac{2}{3}$, mit 3 multiplicirt, so bekommt man $\frac{1521}{833}xx = 11492$, ferner mit 833 multiplicirt, giebt $1521xx = 9572836$ und durch 1521 dividirt, wird $xx = \frac{9572836}{1521}$ woraus die Quadrat-Wurzel gezogen, giebt $x = \frac{3094}{39}$, welcher Bruch sich durch 13 verkleinern läßt und da kommt $x = \frac{238}{3}$, oder $x = 79\frac{1}{3}$; dahero erhält man ferner $\frac{3}{7}x = 34$ und $\frac{15}{119}x = 10$.

Antwort: Also hat der erste $79\frac{1}{3}$ Rthl. der zweyte 34 Rthl. und der dritte 10 Rthl. gehabt.

Anmerckung: diese Rechnung läßt sich noch leichter anstellen, wann man die darinn vorkommenden Zahlen in ihre Factores auflößt, und dabey insonderheit ihre Quadrate bemerckt:

Also ist $507 = 3 \cdot 169$, wo 169 das Quadrat von 13 ist; hernach ist $833 = 7 \cdot 119$ und $119 = 7 \cdot 17$ da man nun hat $\frac{3 \cdot 169}{17 \cdot 49}xx = 3830\frac{2}{3}$ so multiplicire man mit 3, da kommt $\frac{9 \cdot 169}{17 \cdot 49}xx = 11492$. Diese Zahl löse man auch in ihre Factores auf, wovon der erste 4 so gleich in die Augen fällt, also daß $11492 = 4 \cdot 2873$; ferner läßt sich 2873 durch 17 theilen und wird $2873 = 17 \cdot 169$, dahero unsere Gleichung also aussieht:

$$\frac{9 \cdot 169}{17 \cdot 49}xx = 4 \cdot 17 \cdot 169,$$

welche durch 169 dividirt, wird: $\frac{9}{17 \cdot 49}xx = 4 \cdot 17$; ferner mit $17 \cdot 49$ multiplicirt und durch 9 dividirt giebt $xx = \frac{4 \cdot 289 \cdot 49}{9}$, wo alle Factores Quadrate sind und also die Wurzel seyn wird $x = \frac{2 \cdot 17 \cdot 7}{3} = \frac{238}{3}$ wie oben.

75.

V. **Frage**: Etliche Kaufleute bestellen einen Factor, schicken ihn nach Archangel zu halten einen Handel, haben eingelegt jeder zehnmal so viel Rthl. als der Personen sind. Gewinnt der Factor je mit 100 Rthl. zweymal so viel als der Personen sind. Wann man dann $\frac{1}{100}$ Theil des gantzen Gewinst multiplicirt mit $2\frac{2}{9}$ so kommt die Zahl der Gesellen heraus. Wie viel sind ihrer gewesen?

Die Anzahl derselben sey $= x$ und da ein jeder $10x$ Rthl. eingelegt hat, so war das gantze Capital $= 10xx$ Rthl. Nun gewinnt der Factor mit 100 Rthl.

$2x$ Rthl. folglich gewinnt er $\frac{1}{5}x^3$ mit dem gantzen Capital $10xx$. Der $\frac{1}{100}$ Theil dieses Gewinnsts ist demnach $\frac{1}{500}x^3$, welcher mit $2\frac{2}{9}$, das ist mit $\frac{20}{9}$ multiplicirt, giebt $\frac{20}{4500}x^3$, oder $\frac{1}{225}x^3$ welches der Zahl der Gesellen x gleich seyn muß.

Also hat man diese Gleichung $\frac{1}{225}x^3 = x$, oder $x^3 = 225x$, welche Cubisch zu seyn scheinet, weil man aber durch x dividiren kann, so kommt diese Quadratische heraus $xx = 225$ und $x = 15$.

Antwort: es sind dahero in allen 15 Gesellen gewesen und ein jeder hat 150 Rthl. eingelegt.

CAPITEL 6

VON DER AUFLÖSUNG DER VERMISCHTEN QUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

76.

Eine vermischte Quadratische Gleichung wird genennt, wann in derselben dreyerley Glieder vorkommen, nemlich solche, welche das Quadrat der unbekanten Zahl enthalten, wie axx; hernach auch solche, worinn die unbekante Zahl selbst vorkommt, als bx, und endlich solche Glieder, welche blos aus bekanten Zahlen zusammengesetzt sind. Da nun zwey oder mehr Glieder von einer Art in eins zusammen gezogen werden, und alle auf eine Seite des Zeichens $=$ gebracht werden können, so wird die Form dieser Gleichung also beschaffen seyn:

$$axx \mp bx \mp c = 0.$$

Wie nun aus solchen Gleichungen der Werth von x gefunden werden soll, wird in diesem Capitel gezeigt werden, zu welchem Ende zweyerley Wege führen.

77.

Eine solche Gleichung kann durch die Theilung also eingerichtet werden, daß das erste Glied blos allein das reine Quadrat der unbekanten Zahl xx enthalte; hernach laße man das zweyte Glied auf eben der Seite wo xx steht, das bekante Glied aber bringe man auf die andere Seite. Solcher Gestalt wird unsere Gleichung diese Form bekommen $xx \pm px = \pm q$, wo p und q bekante Zahlen, sowohl positive als negative andeuten; und jetzo kommt alles