Unsere Gleichung wird also seyn: $(xx - 3x + 2)^2 = xx$, daraus die Quadrat-Wurzel $xx - 3x + 2 = \pm x$; gilt das obere Zeichen, so hat man $xx = 4x - 2$, für das untere Zeichen aber $xx = 2x - 2$, woraus diese vier Wurzeln gefunden werden $x = 2 \pm \sqrt{2}$ und $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.

CAPITEL 15

VON EINER NEUEN AUFLÖSUNG DER BIQUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

212.

Wie durch die obige Regel des Bombelli die Biquadratischen Gleichungen durch Hülfe einer Cubischen aufgelöst werden, so ist seit dem noch ein anderer Weg gefunden worden eben dieses zu leisten, welcher von dem vorigen gänzlich unterschieden ist und eine besondere Erklärung verdienet.

213.

Man setze nemlich, die Wurzel einer Biquadratischen Gleichung habe diese Form

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r},$$

wo die Buchstaben p, q und r die drey Wurzeln einer solchen Cubischen Gleichung andeuten

$$z^3 - fzz + gz - h = 0,$$

also daß seyn wird

$$p + q + r = f, \quad pq + pr + qr = g \quad \text{und} \quad pqr = h;$$

dieses voraus gesetzt so quadrire man die angenommene Form der Wurzel $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, da kommt heraus $xx = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$. Da nun $p + q + r = f$ so wird $xx - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$; nun nehme man nochmals die Quadrate, so wird

$$x^4 - 2fxx + ff = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqqr} + 8\sqrt{pqrr}.$$

Da nun $4pq + 4pr + 4qr = 4g$ so wird

$$x^4 - 2fxx + ff - 4g = 8\sqrt{pqr}\cdot(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r});$$

da aber $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=x$ und $pqr=h$, also $\sqrt{pqr}=\sqrt{h}$, so gelangen wir zu dieser Biquadratischen Gleichung

$$x^4-2fxx-8x\sqrt{h}+ff-4g=0$$

wovon die Wurzel gewis ist

$$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},$$

und wo p,q und r die drey Wurzeln sind der obigen Cubischen Gleichung

$$z^3-fzz+gz-h=0.$$

214.

Die herausgebrachte Biquadratische Gleichung kann als allgemein angesehen werden, obgleich das zweyte Glied x^3 darin mangelt. Dann man kann immer eine jede vollständige Gleichung in eine andere verwandeln, wo das zweyte Glied fehlt, wie wir hernach zeigen wollen.

Es sey demnach diese Biquadratische Gleichung gegeben:

$$x^4-axx-bx-c=0,$$

wovon eine Wurzel gefunden werden soll. Man vergleiche dieselbe dahero mit der gefundenen Form um dadurch die Buchstaben f, g und h zu bestimmen. Darzu wird erfordert, daß I.) $2f=a$ also $f=\frac{a}{2}$, II.) $8\sqrt{h}=b$ allso $h=\frac{bb}{64}$, III.) $ff-4g=-c$, oder $\frac{aa}{4}-4g+c=0$, oder $\frac{1}{4}aa+c=4g$, folglich $g=\frac{1}{16}aa+\frac{1}{4}c$.

215.

Aus der vorgegebenen Gleichung $x^4-axx-bx-c=0$ findet man demnach die Buchstaben f, g und h also bestimmt

$$f=\frac{1}{2}a,\quad g=\frac{1}{16}aa+\frac{1}{4}c,\quad \text{und}\quad h=\frac{1}{64}bb\quad \text{oder}\quad \sqrt{h}=\frac{1}{8}b;$$

daraus formire man diese Cubische Gleichung: $z^3-fzz+gz-h=0$, wovon man nach der obigen Regel die drey Wurzeln suchen muß. Dieselben seyen nun I.) $z=p$, II.) $z=q$, III.) $z=r$: aus welchen, wann sie gefunden worden, eine Wurzel unserer Biquadratischen Gleichung seyn wird

$$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}.$$

216.

Solcher Gestalt scheint es zwar, daß nur eine Wurzel unserer Gleichung gefunden werde, allein da ein jedes Quadrat-Wurzel-Zeichen so wohl negativ als positiv genommen werden kann, so enthält diese Form so gar alle vier Wurzeln.

Wollte man zwar alle Veränderungen der Zeichen gelten laßen, so kämen 8 verschiedene Werthe für x heraus, wovon doch nur 4 gelten können. Es ist aber zu bemercken, daß das Product dieser drey Glieder, nemlich $\sqrt{pqr}$ gleich seyn müße dem $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$; dahero wann $\frac{1}{8}b$ positiv ist so muß das Product der Theile auch positiv seyn, in welchem Fall nur diese vier Aenderungen gelten.

$$\begin{aligned} &\text{I.)}\ x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}, \\ &\text{II.)}\ x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}, \\ &\text{III.)}\ x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}, \\ &\text{IV.)}\ x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}, \end{aligned}$$

ist aber $\frac{1}{8}b$ negativ, so sind die 4 Werthe von x folgende:

$$\begin{aligned} &\text{I.)}\ x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}, \\ &\text{II.)}\ x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}, \\ &\text{III.)}\ x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}, \\ &\text{IV.)}\ x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}. \end{aligned}$$

Durch Hülfe dieser Anmerckung können in jeglichem Fall alle vier Wurzeln bestimmt werden, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

217.

Es sey diese Biquadratische Gleichung vorgegeben in welcher das zweyte Glied fehlt

$$x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0,$$

welche mit der obigen Formel verglichen giebt $a = 25$, $b = -60$ und $c = 36$, woraus man ferner erhält

$$f = \frac{25}{2}, \quad g = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16} \quad \text{und} \quad h = \frac{225}{4};$$

also ist unsere Cubische Gleichung

$$z^3 - \frac{25}{2}zz + \frac{769}{16}z - \frac{225}{4} = 0.$$

Um hier die Brüche weg zu bringen, so setze man $z = \frac{u}{4}$, so wird

$$\frac{u^3}{64} - \frac{25}{2} \cdot \frac{uu}{16} + \frac{769}{16} \cdot \frac{u}{4} - \frac{225}{4} = 0,$$

welche mit 64 multiplicirt giebt

$$u^3 - 50uu + 769u - 3600 = 0,$$

wovon die drey Wurzeln gefunden werden sollen, welche alle drey positiv sind, und wovon eine Wurzel ist $u = 9$, um die andere zu finden so theile man $u^3 - 50uu + 769u - 3600$ durch $u - 9$, und da kommt diese neue Gleichung $uu - 41u + 400 = 0$ oder $uu = 41u - 400$, woraus gefunden wird $u = \frac{41}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1681}{4} - \frac{1600}{4}\right)} = \frac{41 \pm 9}{2}$; also sind die drey Wurzeln $u = 9$, $u = 16$, $u = 25$, dahero wir erhalten:

$$\text{I.)}\ z = \frac{9}{4}, \quad \text{II.)}\ z = 4, \quad \text{III.)}\ z = \frac{25}{4}.$$

Dieses sind nun die Werthe der Buchstaben p, q und r, also daß

$$p = \frac{9}{4}, \quad q = 4, \quad r = \frac{25}{4};$$

weil nun $\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = -\frac{15}{2}$ und dieser Werth $= \frac{1}{8}b$ negativ ist, so muß man sich mit den Zeichen der Wurzeln $\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{r}$ darnach richten: es muß nemlich entweder nur ein *minus* oder drey *minus* vorhanden seyn; da nun

$$\sqrt{p} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{q} = 2 \quad \text{und} \quad \sqrt{r} = \frac{5}{2},$$

so werden die vier Wurzeln unserer vorgegebenen Gleichung seyn:

$$\begin{aligned}
\text{I.)}\ x &= \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1,\\
\text{II.)}\ x &= \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2,\\
\text{III.)}\ x &= -\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3,\\
\text{IV.)}\ x &= -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6,
\end{aligned}$$

aus welchen diese vier Factoren der Gleichung entstehen

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)=0,$$

wovon die beyden ersten geben $xx-3x+2$, die beyden letztern aber $xx+3x-18$, und diese zwey Producte mit einander multiplicirt bringen just unsere Gleichung hervor.

218.

Nun ist noch übrig zu zeigen wie eine Biquadratische Gleichung, in der das zweyte Glied vorhanden ist, in eine andere verwandelt werden könne, darin das zweyte Glied fehlt, worzu folgende Regel dienet.

Es sey diese allgemeine Gleichung gegeben $y^4+ay^3+byy+cy+d=0$. Hier setze man zu y den vierten Theil der Zahl des andern Glieds, nemlich $\frac{1}{4}a$ und schreibe dafür einen neuen Buchstaben x, also daß $y+\frac{1}{4}a=x$ folglich $y=x-\frac{1}{4}a$; daraus wird

$$yy=xx-\frac{1}{2}ax+\frac{1}{16}aa, \quad \text{ferner} \quad y^3=x^3-\frac{3}{4}axx+\frac{3}{16}aax-\frac{1}{64}a^3,$$

und daraus endlich:

$$\begin{array}{rl}
y^4= & x^4-ax^3+\frac{3}{8}aaxx-\frac{1}{16}a^3x+\frac{1}{256}a^4 \\
+ay^3= & +ax^3-\frac{3}{4}aaxx+\frac{3}{16}a^3x-\frac{1}{64}a^4 \\
+byy= & +bxx-\frac{1}{2}abx+\frac{1}{16}aab \\
+cy= & +cx-\frac{1}{4}ac \\
+d= & +d \\
\hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
x^4+0-\frac{3}{8}aaxx+\frac{1}{8}a^3x-\frac{3}{256}a^4 \\
+bxx-\frac{1}{2}abx+\frac{1}{16}aab \\
+cx-\frac{1}{4}ac \\
+d
\end{array}\right\}=0$$

in welcher Gleichung, wie man sieht, das zweyte Glied weggefallen ist, also daß man jetzt die gegebene Regel darauf anwenden und daraus die vier Wurzeln von x bestimmen kann, aus welchen hernach die vier Werthe von y von selbsten sich ergeben, weil $y=x-\frac{1}{4}a$.

219.

So weit ist man bisher in Auflösung der Algebraischen Gleichungen gekommen, nemlich bis auf den vierten Grad, und alle Bemühungen die Gleichungen von fünften und den höhern Graden auf gleiche Art aufzulösen, oder zum wenigsten auf die niedrigsten Grade zu bringen sind fruchtloß gewesen, also daß man nicht im Stand ist allgemeine Regeln zu geben, wodurch die Wurzeln von höhern Gleichungen ausfindig gemacht werden könnten.

Alles was darinnen geleistet worden, geht nur auf gantz besondere Fälle, worunter derjenige der vornehmste ist, wann irgend eine Rational-Wurzel statt findet, als welche durch Probiren leicht heraus gebracht werden kann, weil man weiß, daß dieselbe immer ein Theiler des letzten Glieds seyn muß; und hier mit ist es eben so beschaffen wie wir schon bey den Gleichungen vom dritten und vierten Grad gelehret haben.

220.

Es wird doch noch nöthig seyn diese Regel auch auf eine solche Gleichung anzuwenden, deren Wurzeln nicht rational sind.

Eine solche Gleichung sey nun diese

$$y^4 - 8y^3 + 14yy + 4y - 8 = 0.$$

Hier muß man vor allen Dingen das zweyte Glied wegschaffen, dahero setze man zu der Wurzel y noch den vierten Theil der Zahl des zweyten Glieds nemlich $y - 2 = x$, so wird

$$y = x + 2 \quad \text{und} \quad yy = xx + 4x + 4, \quad \text{ferner} \quad y^3 = x^3 + 6xx + 12x + 8$$

und

$$\begin{array}{rcrrrrr}
y^4 & = & x^4 + 8x^3 & + 24xx & + 32x & + 16 \\
-\ 8y^3 & = & -8x^3 & - 48xx & - 96x & - 64 \\
+\ 14yy & = & & + 14xx & + 56x & + 56 \\
+\ 4y & = & & & + 4x & + 8 \\
-\ 8 & = & & & & - 8 \\
\hline
& & x^4 + 0 & - 10xx & - 4x & + 8 & = 0,
\end{array}$$

welche mit unserer allgemeinen Form verglichen, gibt $a = 10$, $b = 4$, $c = -8$; woraus wir demnach schließen $f = 5$, $g = \frac{17}{4}$, $h = \frac{1}{4}$ und $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$. Daraus wir sehen, daß das Product $\sqrt{pqr}$ positiv seyn wird. Die Cubische Gleichung wird demnach seyn $z^3 - 5zz + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$, von welcher Cubischen Gleichung die drey Wurzeln p, q und r gesucht werden müßen.

221.

Hier müßen nun erstlich die Brüche weggeschaft werden, deswegen setze man $z = \frac{u}{2}$ so wird $\frac{u^3}{8} - \frac{5uu}{4} + \frac{17}{4} \cdot \frac{u}{2} - \frac{1}{4} = 0$, mit 8 multiplicirt giebt $u^3 - 10uu + 17u - 2 = 0$, wo alle Wurzeln positiv sind. Da nun die Theiler des letzten Glieds sind 1 und 2, so sey erstlich $u = 1$ da wird $1 - 10 + 17 - 2 = 6$ und also nicht 0, setzt man aber $u = 2$ so wird $8 - 40 + 34 - 2 = 0$ welches ein Genüge leistet. Dahero ist eine Wurzel $u = 2$; um die andere zu finden so theile man durch $u - 2$ wie folget:

$$\begin{array}{lrl}
u-2) & u^3 - 10uu + 17u - 2 & (uu - 8u + 1 \\
& \underline{u^3 - 2uu} & \\
& - 8uu + 17u & \\
& \underline{- 8uu + 16u} & \\
& u - 2 & \\
& \underline{u - 2} & \\
& 0 &
\end{array}$$

und da bekommt man $uu - 8u + 1 = 0$, oder $uu = 8u - 1$, woraus die beyden übrigen Wurzeln sind $u = 4 \pm \sqrt{15}$. Da nun $z = \frac{1}{2}u$, so sind die drey Wurzeln der Cubischen Gleichung:

$$\text{I.)}\ z = p = 1, \quad \text{II.)}\ z = q = \frac{4 + \sqrt{15}}{2}, \quad \text{III.)}\ z = r = \frac{4 - \sqrt{15}}{2}.$$

222.

Da wir nun p, q und r gefunden, so werden ihre Quadrat-Wurzeln seyn

$$\sqrt{p} = 1, \quad \sqrt{q} = \frac{\sqrt{(8 + 2\sqrt{15})}}{2}, \quad \sqrt{r} = \frac{\sqrt{(8 - 2\sqrt{15})}}{2}.$$

Aus demjenigen aber was oben [§ 115] ist gezeigt worden, da die Quadrat-Wurzel aus $(a \pm \sqrt{b})$, wann $\sqrt{(aa - b)} = c$, also ausgedrückt worden

$$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{\frac{a + c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - c}{2}},$$

so ist für unsern Fall $a = 8$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{15}$ folglich $b = 60$ dahero $c = 2$, hieraus bekommen wir $\sqrt{(8 + 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, und $\sqrt{(8 - 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$. Da wir nun gefunden haben $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ und $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$, so werden die vier Werthe für x, da wir wißen daß derselben Product positiv seyn muß, folgender Gestalt beschaffen seyn:

$$\text{I.)}\quad x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{5}$$

$$\text{II.)}\quad x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{5}$$

$$\text{III.)}\quad x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

$$\text{IV.)}\quad x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}.$$

Da nun für die gegebene Gleichung $y = x + 2$ war, so sind die vier Wurzeln derselben

$$\text{I.)}\quad y = 3 + \sqrt{5},$$

$$\text{II.)}\quad y = 3 - \sqrt{5},$$

$$\text{III.)}\quad y = 1 + \sqrt{3},$$

$$\text{IV.)}\quad y = 1 - \sqrt{3}.$$

CAPITEL 16

VON DER AUFLÖSUNG DER GLEICHUNGEN DURCH DIE NÄHERUNG

223.

Wann die Wurzeln einer Gleichung nicht rational sind, dieselben mögen nun durch Wurzel-Zeichen ausgedrückt werden können oder nicht, wie bey den höhern Gleichungen geschiehet, so muß man sich begnügen den Werth derselben durch Näherungen zu bestimmen, dergestalt, daß man dem wahren Werth derselben immer näher komme, bis der Fehler endlich vor nichts zu achten. Es sind zu diesem Ende verschiedene Mittel erfunden worden, wovon wir die vornehmsten hier erklären wollen.