seyn werden $x = 1 \pm \sqrt{5}$ und die zwey letztern $x = 2 \pm \sqrt{8}$ also daß die vier gesuchten Wurzeln seyn werden:

$$\text{I.)}\ x = 1 + \sqrt{5},\quad \text{II.)}\ x = 1 - \sqrt{5},\quad \text{III.)}\ x = 2 + \sqrt{8},\quad \text{IV.)}\ x = 2 - \sqrt{8}.$$

Woraus die vier Factoren unserer Gleichung seyn werden

$$(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{8})(x - 2 + \sqrt{8}),$$

welche würcklich mit einander multiplicirt unsere Gleichung hervorbringen müßen. Dann der erste und zweyte mit einander multiplicirt geben $xx - 2x - 4$ und die beiden andern geben $xx - 4x - 4$, welche zwey Producte wiederum mit einander multiplicirt geben $x^4 - 6x^3 + 24x + 16$, welches just die vorgegebene Gleichung ist.

CAPITEL 14

VON DES BOMBELLI REGEL DIE AUFLÖSUNG DER BIQUADRATISCHEN GLEICHUNGEN AUF CUBISCHE ZU BRINGEN

204.

Da schon oben gezeigt worden, wie die Cubische Gleichungen durch Hülfe des Cardani Regel aufgelößt werden können, so kommt die Haupt-Sache bey den Biquadratischen Gleichungen darauf an, daß man die Auflösung derselben auf Cubische Gleichungen zu bringen wiße. Dann ohne Hülfe der Cubischen Gleichungen ist nicht möglich die Biquadratische auf eine allgemeine Art aufzulösen: dann wann man auch eine Wurzel gefunden, so erfordern die übrigen Wurzeln eine Cubische Gleichung. Woraus man sogleich erkennet, daß auch die Gleichungen von einem höheren Grade die Auflösung aller niedrigen voraus setzen.

205.

Hierzu hat nun schon vor etlichen 100 Jahren ein Italiener, Nahmens Bombelli,[1]) eine Regel gegeben, welche wir in diesem Capitel vortragen wollen: Es sey demnach die allgemeine Biquadratische Gleichung gegeben

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0,$$

1) Im Original ist dieser Name stets Pombelli geschrieben. H. W.

wo die Buchstaben a, b, c, d alle nur ersinliche Zahlen bedeuten können; nun stelle man sich vor, daß diese Gleichung mit der folgenden einerley sey

$$\left(xx + \frac{1}{2}ax + p\right)^2 - (qx + r)^2 = 0,$$

wo es nur darauf ankommt die Buchstaben p und q und r so zu bestimmen, daß die gegebene Gleichung herauskommt. Bringt man nun diese letztere in Ordnung, so kommt heraus

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + \tfrac{1}{4}\,aaxx &+ \ apx + pp \\ + \ 2pxx &- 2qrx - rr \\ - \ qqxx & \end{aligned}$$

Hier sind nun die zwey ersten Glieder mit unserer Gleichung schon einerley; für das dritte Glied muß man setzen $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b$ woraus man hat $qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$, für das vierte Glied muß man setzen $ap - 2qr = c$, woraus man hat $2qr = ap - c$, für das letzte Glied aber $pp - rr = d$, woraus wird $rr = pp - d$. Aus diesen drey Gleichungen müßen nun die drey Buchstaben p, q und r bestimmt werden.

206.

Um dieses auf die leichteste Art zu verrichten, so nehme man die erste viermal, welche seyn wird $4qq = aa + 8p - 4b$, diese multiplicire man mit der letzten $rr = pp - d$, so bekommt man

$$4qqrr = 8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b)$$

nun quadrire man die mittlere Gleichung

$$4qqrr = aapp - 2acp + cc;$$

wir haben also zweyerley Werthe für $4qqrr$, welche einander gleich gesetzt diese Gleichung geben

$$8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b) = aapp - 2acp + cc;$$

und alle Glieder auf eine Seite gebracht, geben

$$8p^3 - 4bpp + (2ac - 8d)p - aad + 4bd - cc = 0$$

welches eine Cubische Gleichung ist, daraus in einem jeden Fall der Werth von p nach den oben gegebenen Regeln bestimmt werden muß.

207.

Hat man nun aus den gegebenen Zahlen a, b, c, d die drey Werthe des Buchstaben p gefunden, worzu es genung ist nur einen davon entdeckt zu haben, so erhält man daraus so gleich die beyden andern Buchstaben q und r. Denn aus der ersten Gleichung wird seyn $q = \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + 2p - b\right)}$ und aus der zweyten erhält man $r = \frac{ap - c}{2q}$. Wann aber diese drey Buchstaben für einen jeglichen Fall gefunden worden, so können daraus alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung folgender Gestalt bestimmt werden.

Da wir die gegebene Gleichung auf diese Form gebracht haben

$$\left(xx + \tfrac{1}{2}ax + p\right)^2 - (qx + r)^2 = 0,$$

so ist $\left(xx + \frac{1}{2}ax + p\right)^2 = (qx + r)^2$; daraus die Quadrat-Wurzel gezogen wird $xx + \frac{1}{2}ax + p = qx + r$, oder auch $xx + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r$.

Die erstere giebt

$$xx = \left(q - \tfrac{1}{2}a\right)x - p + r$$

woraus zwey Wurzeln gefunden werden; die übrigen zwey werden aber aus der andern gefunden, welche also aussieht

$$xx = -\left(q + \tfrac{1}{2}a\right)x - p - r.$$

208.

Um diese Regel mit einem Exempel zu erläutern, so sey diese Gleichung vorgegeben

$$x^4 - 10x^3 + 35xx - 50x + 24 = 0,$$

welche mit unserer allgemeinen Formel verglichen giebt $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$ aus welchen für den Buchstaben p zu bestimmen folgende Gleichung erwächst $8p^3 - 140pp + 808p - 1540 = 0$; welche durch vier dividirt giebt

$$2p^3 - 35pp + 202p - 385 = 0.$$

Die Theiler der letzten Zahl sind 1, 5, 7, 11, etc. von welchen 1 nicht angeht; setzt man aber $p = 5$ so kommt $250 - 875 + 1010 - 385 = 0$, folglich ist $p = 5$; will man auch setzen $p = 7$, so kommt $686 - 1715 + 1414 - 385 = 0$; also ist $p = 7$ die zweyte Wurzel. Um die dritte zu finden so dividire man die

Gleichung durch 2 so kommt $p^3 - \frac{35}{2}pp + 101p - \frac{385}{2} = 0$, und da die Zahl im zweyten Glied $\frac{35}{2}$ die Summe aller drey Wurzeln ist, die beyden erstern aber zusammen 12 machen so muß die dritte seyn $\frac{11}{2}$. Also haben wir alle drey Wurzeln. Es wäre aber genung nur eine zu wißen, weil aus einer jeden die vier Wurzeln unserer Biquadratischen Gleichung herauskommen müßen.

209.

Um dieses zu zeigen, so sey erstlich $p = 5$, daraus wird alsdann

$$q = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = 0 \quad \text{und} \quad r = \frac{-50 + 50}{0} = \frac{0}{0}.$$

Da nun hierdurch nichts bestimmt wird, so nehme man die dritte Gleichung $rr = pp - d = 25 - 24 = 1$, und also $r = 1$: dahero unsere beyde Quadrat-Gleichungen seyn werden:

$$\text{I.) } xx = 5x - 4, \qquad \text{II.) } xx = 5x - 6;$$

die erstere giebt nun diese zwey Wurzeln $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, folglich entweder $x = 4$, oder $x = 1$. Die andere aber giebt $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 1}{2}$; daraus wird entweder $x = 3$, oder $x = 2$.

Will man aber setzen $p = 7$ so wird

$$q = \sqrt{(25 + 14 - 35)} = 2 \quad \text{und} \quad r = \frac{-70 + 50}{4} = -5$$

woraus diese zwey Quadrat-Gleichungen entstehen

$$\text{I.) } xx = 7x - 12, \qquad \text{II.) } xx = 3x - 2;$$

deren erstere giebt $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{7 \pm 1}{2}$ dahero $x = 4$ und $x = 3$; die andere giebt diese Wurzel $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{3 \pm 1}{2}$, dahero $x = 2$ und $x = 1$, welches eben die vier Wurzeln sind, die schon vorher gefunden worden.

Und eben dieselben folgen auch aus dem dritten Werth $p = \frac{11}{2}$. Dann da wird $q = \sqrt{(25 + 11 - 35)} = 1$ und $r = \frac{-55 + 50}{2} = -\frac{5}{2}$, woraus die beyden Quadratischen Gleichungen seyn werden

$$\text{I.) } xx = 6x - 8, \qquad \text{II.) } xx = 4x - 3;$$

aus der ersteren bekommt man $x = 3 \pm \sqrt{1}$, also $x = 4$ und $x = 2$; aus der andern aber $x = 2 \pm \sqrt{1}$, also $x = 3$ und $x = 1$, welche die schon gefundene vier Wurzeln sind.

210.

Es sey ferner diese Gleichung vorgegeben $x^4 - 16x - 12 = 0$, in welcher ist $a = 0$, $b = 0$, $c = -16$, $d = -12$; dahero unsere Cubische Gleichung seyn wird $8p^3 + 96p - 256 = 0$, das ist $p^3 + 12p - 32 = 0$, welche Gleichung noch einfacher wird, wann man setzt $p = 2t$; da wird nemlich

$$8t^3 + 24t - 32 = 0 \quad \text{oder} \quad t^3 + 3t - 4 = 0.$$

Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 4, aus welchen $t = 1$ eine Wurzel ist, daraus wird $p = 2$ und ferner $q = \sqrt{4} = 2$ und $r = \frac{16}{4} = 4$. Dahero sind die beyden Quadrat-Gleichungen $xx = 2x + 2$ und $xx = -2x - 6$, daher die Wurzeln seyn werden $x = 1 \pm \sqrt{3}$, und $x = -1 \pm \sqrt{-5}$.

211.

Um die bisherige Auflösung noch deutlicher zu machen, so wollen wir dieselbe bey dem folgenden Exempel gantz wiederhohlen:

Es sey demnach diese Gleichung gegeben $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$, welche in dieser Formel enthalten seyn soll $(xx - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo im ersten Theil $-3x$ gesetzt worden, weil -3 die Hälfte ist der Zahl -6 im zweyten Glied der Gleichung. Diese Form aber entwickelt giebt

$$x^4 - 6x^3 + (2p + 9 - qq)xx - (6p + 2qr)x + pp - rr = 0,$$

mit dieser Form vergleicht man nun unsere Gleichung so bekommt man:

$$\text{I.)}\ 2p + 9 - qq = 12, \qquad \text{II.)}\ 6p + 2qr = 12, \qquad \text{III.)}\ pp - rr = 4;$$

aus der ersten erhalten wir $qq = 2p - 3$, aus der zweyten $2qr = 12 - 6p$ oder $qr = 6 - 3p$, aus der dritten $rr = pp - 4$; nun multiplicire man rr und qq mit einander so bekommt man $qqrr = 2p^3 - 3pp - 8p + 12$. Quadrirt man aber den Werth von qr, so kommt $qqrr = 36 - 36p + 9pp$; dahero erhalten wir diese Gleichung: $2p^3 - 3pp - 8p + 12 = 9pp - 36p + 36$, oder $2p^3 - 12pp + 28p - 24 = 0$, oder durch 2 dividirt diese $p^3 - 6pp + 14p - 12 = 0$, wovon die Wurzel ist $p = 2$; daraus wird $qq = 1$, $q = 1$ und $qr = r = 0$.

Unsere Gleichung wird also seyn: $(xx - 3x + 2)^2 = xx$, daraus die Quadrat-Wurzel $xx - 3x + 2 = \pm x$; gilt das obere Zeichen, so hat man $xx = 4x - 2$, für das untere Zeichen aber $xx = 2x - 2$, woraus diese vier Wurzeln gefunden werden $x = 2 \pm \sqrt{2}$ und $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.

CAPITEL 15

VON EINER NEUEN AUFLÖSUNG DER BIQUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

212.

Wie durch die obige Regel des Bombelli die Biquadratischen Gleichungen durch Hülfe einer Cubischen aufgelöst werden, so ist seit dem noch ein anderer Weg gefunden worden eben dieses zu leisten, welcher von dem vorigen gänzlich unterschieden ist und eine besondere Erklärung verdienet.

213.

Man setze nemlich, die Wurzel einer Biquadratischen Gleichung habe diese Form

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r},$$

wo die Buchstaben p, q und r die drey Wurzeln einer solchen Cubischen Gleichung andeuten

$$z^3 - fzz + gz - h = 0,$$

also daß seyn wird

$$p + q + r = f, \quad pq + pr + qr = g \quad \text{und} \quad pqr = h;$$

dieses voraus gesetzt so quadrire man die angenommene Form der Wurzel $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, da kommt heraus $xx = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$. Da nun $p + q + r = f$ so wird $xx - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$; nun nehme man nochmals die Quadrate, so wird

$$x^4 - 2fxx + ff = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqqr} + 8\sqrt{pqrr}.$$

Da nun $4pq + 4pr + 4qr = 4g$ so wird

$$x^4 - 2fxx + ff - 4g = 8\sqrt{pqr}\cdot(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r});$$