Also ist der andere Factor $x + 7$ und unsere Gleichung wird durch dieses Product vorgestellt $(x - 3)(x + 7) = 0$ woraus die beyden Werthe für x sogleich erhellen, da nemlich aus dem ersten Factor $x = 3$ aus dem andern aber $x = -7$ wird.

CAPITEL 10

VON DER AUFLÖSUNG DER REINEN CUBISCHEN GLEICHUNGEN

144.

Eine reine Cubische Gleichung wird genennt wann der Cubus der unbekanten Zahl einer bekanten Zahl gleich gesetzt wird, also daß darinn weder das Quadrat der unbekanten Zahl, noch dieselbe selbst vorkommt.

Eine solche Gleichung ist $x^3 = 125$, oder auf eine allgemeine Art $x^3 = a$, oder $x^3 = \frac{a}{b}$.

145.

Wie nun aus einer solchen Gleichung der Werth von x gefunden werden soll, ist für sich offenbahr, indem man nur nöthig hat beyderseits die Cubic-Wurzel auszuziehen.

Also aus der Gleichung $x^3 = 125$ findet man $x = 5$, und aus der Gleichung $x^3 = a$ bekommt man $x = \sqrt[3]{a}$; aus $x^3 = \frac{a}{b}$ aber hat man

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad \text{oder} \quad x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Wann man dahero nur gelernet hat die Cubic-Wurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen, so kann man auch solche Gleichungen auflösen.

146.

Solcher Gestalt erhält man aber nur einen Werth für x, da nun eine jegliche Quadratische Gleichung zwey Werthe hat, so hat man Grund zu vermuthen, daß eine Cubische Gleichung auch mehr als einen Werth haben müße, dahero wird es der Mühe werth seyn, diese Sache genauer zu untersuchen, und im Fall eine solche Gleichung mehr Werthe für x haben sollte, dieselben auch ausfündig zu machen.

147.

Wir wollen z. E. diese Gleichung betrachten $x^3 = 8$, woraus alle Zahlen gefunden werden sollen, deren Cubus gleich 8 sey, da nun eine solche Zahl ohnstreitig $x = 2$ ist, so muß nach dem vorigen Capitul die Formel $x^3 - 8 = 0$ sich nothwendig durch $x - 2$ theilen laßen; wir wollen also diese Theilung verrichten wie folget:

$$\begin{array}{rl} x-2) & x^3 - 8 \quad (xx + 2x + 4 \\ & \underline{x^3 - 2xx} \\ & \quad 2xx - 8 \\ & \quad \underline{2xx - 4x} \\ & \qquad\quad 4x - 8 \\ & \qquad\quad \underline{4x - 8} \\ & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Also läßt sich unsere Gleichung $x^3 - 8 = 0$ durch diese Factores vorstellen

$$(x - 2)(xx + 2x + 4) = 0.$$

148.

Da nun die Frage ist was für eine Zahl für x angenommen werden müße, daß $x^3 = 8$ werde, oder daß $x^3 - 8 = 0$ werde, so ist klar, daß dieses geschehe, wann das gefundene Product gleich 0 werde; dasselbe wird aber 0, nicht nur wann der erste Factor $x - 2 = 0$ wird, woraus entspringt $x = 2$, sondern auch, wann der andere Factor $xx + 2x + 4 = 0$ werde. Man setze also $xx + 2x + 4 = 0$, so hat man $xx = -2x - 4$ und dahero wird

$$x = -1 \pm \sqrt{-3}.$$

149.

Außer dem Fall also $x = 2$ in welchem die Gleichung $x^3 = 8$ erfüllet wird, haben wir noch zwey andere Werthe für x, deren Cubi ebenfals 8 sind, und welche also beschaffen sind:

$$\text{I.)}\ x = -1 + \sqrt{-3} \quad \text{und} \quad \text{II.)}\ x = -1 - \sqrt{-3}$$

welches außer Zweifel gesetzt wird, wann man die Cubi davon nimmt, wie folget:

$$\begin{array}{rcr}
-1+\sqrt{-3} & & -1-\sqrt{-3} \\
\underline{-1+\sqrt{-3}} & & \underline{-1-\sqrt{-3}} \\
1-\sqrt{-3} & & 1+\sqrt{-3} \\
\underline{-\sqrt{-3}-3} & & \underline{+\sqrt{-3}-3} \\
-2-2\sqrt{-3} & \text{Quadrat} & -2+2\sqrt{-3} \\
\underline{-1+\sqrt{-3}} & & \underline{-1-\sqrt{-3}} \\
2+2\sqrt{-3} & & 2-2\sqrt{-3} \\
\underline{-2\sqrt{-3}+6} & & \underline{+2\sqrt{-3}+6} \\
8 & \text{Cubus} & 8
\end{array}$$

Diese beyden Werthe sind zwar imaginär oder unmöglich, verdienen aber nichts desto weniger bemercket zu werden.

150.

Dieses findet auch insgemein statt für eine jegliche dergleiche Cubische Gleichung $x^3 = a$, wo außer dem Werth $x = \sqrt[3]{a}$ noch zwey andere ebenfals statt finden. Man setze um der Kürtze willen $\sqrt[3]{a} = c$ also daß $a = c^3$ und unsere Gleichung diese Form bekomme, $x^3 - c^3 = 0$, welche letztere sich durch $x - c$ theilen läßt, wie aus dieser Division zu sehen:

$$\begin{array}{rl}
x-c) & x^3 - c^3 \quad (xx + cx + cc \\
& \underline{x^3 - cxx} \\
& \quad cxx - c^3 \\
& \quad \underline{cxx - ccx} \\
& \qquad ccx - c^3 \\
& \qquad \underline{ccx - c^3} \\
& \qquad\quad 0
\end{array}$$

dahero wird unsere Gleichung durch dieses Product vorgestellt

$$(x - c)(xx + cx + cc) = 0,$$

welches würcklich gleich 0 wird, nicht nur wann $x - c = 0$ oder $x = c$, sondern auch wann $xx + cx + cc = 0$, daraus aber wird $xx = -cx - cc$ und dahero

$$x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{cc}{4} - cc\right)} \quad \text{oder} \quad x = \frac{-c \pm \sqrt{-3cc}}{2}$$

das ist

$$x = \frac{-c \pm c\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \cdot c,$$

in welcher Formel noch zwey Werthe für x enthalten sind.

151.

Da nun c anstatt $\sqrt[3]{a}$ geschrieben worden, so ziehen wir daher diesen Schluß, daß von einer jeden Cubischen Gleichung von dieser Form $x^3 = a$ dreyerley Werthe für x gefunden werden können, welche also ausgedrückt werden:

$$\text{I.)}\ x = \sqrt[3]{a}, \quad \text{II.)}\ x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a}, \quad \text{III.)}\ x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a}$$

woraus erhellet, daß eine jegliche Cubic-Wurzel dreyerley Werthe habe, wovon zwar nur der erste möglich, die beyden andern aber unmöglich sind, welches deswegen hier wohl zu bemercken, weil wir schon oben gesehen, daß eine jede Quadratische zweyerley Werthe hat, und unten noch gezeigt werden wird, daß eine jede Wurzel vom vierten Grad vier verschiedene Werthe, vom fünften Grad fünf dergleichen und so weiter habe.

Bey gemeinen Rechnungen, wird zwar nur der erste von diesen 3 Werthen gebraucht, weil die beyden andern unmöglich sind, und darüber wollen wir noch einige Exempel beyfügen.

152.

I. Frage: Suche eine Zahl, daß derselben Quadrat mit ihrem $\frac{1}{4}$ multiplicirt 432 hervorbringe?

Diese Zahl sey x, so muß xx mit $\frac{1}{4}x$ multiplicirt der Zahl 432 gleich werden: dahero wird $\frac{1}{4}x^3 = 432$ mit 4 multiplicirt wird $x^3 = 1728$ und die Cubic-Wurzel ausgezogen, giebt $x = 12$.

Antwort: die gesuchte Zahl ist 12 dann ihr Quadrat ist 144 mit ihrem $\frac{1}{4}$ multiplicirt, das ist 3, giebt 432.

153.

II. Frage: Suche eine Zahl, deren vierte Potestät durch ihre Hälfte dividirt und dazu $14\frac{1}{4}$ addirt, 100 werde?

Die Zahl sey x, so ist ihre vierte Potestät x^4, welche durch ihre Hälfte $\frac{1}{2}x$ dividirt, giebt $2x^3$, dazu $14\frac{1}{4}$ addirt soll 100 machen; also hat man

$2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$, wo $14\frac{1}{4}$ subtrahirt giebt $2x^3 = \frac{343}{4}$, durch 2 dividirt, wird $x^3 = \frac{343}{8}$ und die Cubic-Wurzel ausgezogen erhält man $x = \frac{7}{2}$.

154.

III. Frage: Einige Hauptleute liegen zu Felde, jeder hat unter sich dreymal so viel Reuter, und 20 mal so viel Fußgänger als der Hauptleute sind; und ein Reuter bekommt Monaths-Sold gleich so viel Gulden, ein Fußgänger aber halb so viel Gulden als der Hauptleute sind, und beträgt der monathliche Sold in allem 13000 Gulden. Wie viel sind es Hauptleute gewesen?

Es seyen x Hauptleute gewesen, so hat einer unter sich gehabt $3x$ Reuter und $20x$ Fußgänger. Also die Zahl aller Reuter war $3xx$ und der Fußgänger $20xx$. Da nun ein Reuter x Fl. bekommt, ein Fußknecht aber $\frac{1}{2}x$ Fl. so ist der monathliche Sold der Reuter $3x^3$ Fl. der Fußknechte aber $10x^3$ Fl. insgesammt also bekommen sie $13x^3$ Fl. so der Zahl 13000 gleich seyn muß: da also $13x^3 = 13000$ so wird $x^3 = 1000$ und $x = 10$.

So viel sind der Hauptleute gewesen.

155.

IV. Frage: Etliche Kaufleute machen eine Gesellschaft, und legt jeder 100 mal so viel ein als ihrer sind, schicken damit einen Factoren nach Venedig, der gewinnt je mit 100 Fl. zweymal so viel Fl. als ihrer sind, kommt wieder zurück, und der Gewinst beträgt 2662 Fl. Ist die Frage wie viel der Kaufleute sind?

Es seyen x Kaufleute gewesen, so hat jeder eingelegt $100x$ Fl. und das gantze Capital war $100xx$ Fl. Da nun mit 100 Fl. $2x$ Fl. gewonnen worden, so war der Gewinst $2x^3$ so der Zahl 2662 gleich seyn soll: also $2x^3 = 2662$, dahero $x^3 = 1331$ und folglich $x = 11$, so viel sind es Kaufleute gewesen.

156.

V. Frage: Eine Bäuerin vertauscht Käse gegen Hüner, giebt je 2 Käse für 3 Hüner: die Hüner legen Eyer, jede $\frac{1}{3}$ so viel als der Hüner sind, mit denselben geht sie auf den Marckt, giebt je 9 Eyer für so viel Pfennig als ein Huhn hat Eyer gelegt, löset 72 Pfennig: wie viel hat die Bäurin Käse vertauscht?

Die Zahl der Käse sey gewesen x, so sind dieselben gegen $\frac{3}{2}x$ Hüner vertauscht worden; da nun ein Huhn $\frac{1}{2}x$ Eyer legt, so ist die Zahl aller Eyer $\frac{3}{4}xx$. Nun werden 9 Eyer verkauft für $\frac{1}{2}x$ Pf. also wird in allem gelöst $\frac{1}{24}x^3$, so 72 gleich seyn muß: also daß $\frac{1}{24}x^3 = 72$ folglich $x^3 = 24 \cdot 72 = 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 9$ oder $x^3 = 8 \cdot 8 \cdot 27$ folglich $x = 12$, und so viel Käse hat die Bäuerin gehabt, welche gegen 18 Hüner vertauscht worden.

CAPITEL 11

VON DER AUFLÖSUNG DER VOLLSTÄNDIGEN CUBISCHEN GLEICHUNGEN

157.

Eine vollständige Cubische Gleichung wird genennt, wann darinn außer dem Cubo der unbekanten Zahl, noch diese unbekante Zahl selbst und ihr Quadrat vorkommen, dahero die allgemeine Form solcher Gleichungen ist:

$$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0$$

wann nemlich alle Glieder auf eine Seite sind gebracht worden. Wie nun aus einer solchen Gleichung die Werthe für x, welche auch die Wurzeln der Gleichung genennt werden, zu finden seyn, soll in diesem Capitel gezeigt werden; dann man kann hier schon zum voraus setzen, daß eine solche Gleichung, immer drey Wurzeln habe, weil dieses schon im vorigen Capitel von den reinen Gleichungen dieses Grads ist gezeiget worden.

158.

Wir wollen für den Anfang diese Gleichung betrachten:

$$x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0,$$

und da eine Quadratische Gleichung als ein Product aus zweyen Factoren angesehen werden kann, so kann man diese Cubische Gleichung als ein Product aus drey Factoren ansehen, welche in diesem Fall sind:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

als welche mit einander multiplicirt die obige Gleichung hervorbringen.