Vollständige Anleitung zur Algebra

von

Hrn. Leonhard Euler.

Zweyter Theil.

Von Auflösung algebraischer Gleichungen und der unbestimmten Analytic.

St. Petersburg.
gedruckt bey der Kays. Acad. der Wissenschaften 1770.

DES ZWEYTEN THEILS ERSTER ABSCHNITT

VON DEN ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN UND DERSELBEN AUFLÖSUNG

CAPITEL 1

VON DER AUFLÖSUNG DER AUFGABEN ÜBERHAUPT

1.

Die Haupt-Absicht der Algebra so wie aller Theile der Mathematic ist dahin gerichtet, daß man den Werth solcher Größen, die bisher unbekant gewesen bestimmen möge, welches aus genauer Erwegung der Bedingungen, welche dabey vorgeschrieben und durch bekante Größen ausgedrückt werden, geschehen muß. Dahero die Algebra auch also beschrieben wird, daß darinnen gezeigt werde wie man aus bekanten Größen unbekante ausfindig machen könne.

2.

Dieses stimmt auch mit allem demjenigen überein, was bisher vorgetragen worden, indem allenthalben aus bekanten Größen andere herausgebracht worden sind, so vorher als unbekant angesehen werden konnten.

Das erste Beyspiel findet man so gleich in der Addition, da von zwey oder mehr gegebenen Zahlen die Summa gefunden worden. Daselbst wurde nemlich eine Zahl gesucht welche den gegebenen zusammen genommen gleich ist.

Bey der Subtraction wurde eine Zahl gesucht, welche dem Unterscheid zweyer gegebenen Zahlen gleich war.

Und eben so verhält es sich auch mit der Multiplication und Division, wie auch mit der Erhebung der Potestäten und der Ausziehung der Wurzeln, wo immer eine vorher unbekante Zahl aus bekanten gefunden wird.

3.

In dem letzten Abschnitt haben wir schon verschiedene Fragen aufgelößt, wobey es immer auf die Erfindung einer Zahl angekommen, welche aus andern gegebenen Zahlen unter gewißen Bedingungen geschloßen werden mußte.

Alle Fragen lauffen also da hinaus, daß aus einigen gegebenen Zahlen eine neue gefunden werden soll, welche mit jenen in einer gewißen Verbindung stehe, und diese Verbindung wird durch gewisse Bedingungen oder Eigenschaften, welche der gesuchten Zahl zukommen müßen, bestimmt.

4.

Bey einer jeden vorkommenden Frage wird nun diejenige Zahl die gesucht werden soll, durch einen der letztern Buchstaben des Alphabets angedeutet, und dabey alle vorgeschriebene Bedingungen in Erwegung gezogen, wodurch man auf eine Vergleichung zwischen zweyen Zahlen geführet wird. Aus einer solchen Gleichung muß hernach der Werth der gesuchten Zahl bestimmt werden, wodurch die Frage aufgelößet wird. Bisweilen müßen auch mehrere Zahlen gesucht werden, welches auf gleiche weise durch Gleichungen geschehen muß.

5.

Dieses wird durch ein Exempel deutlicher werden; man stelle sich diese Frage vor:

20 Personen, Männer und Weiber, zehren in einem Wirths-Haus: ein Man verzehrt 8 Gr. ein Weib aber 7 Gr. und die gantze Zeche beläuft sich auf 6 Rthl. Nun ist die Frage wie viel Männer und Weiber daselbst gewesen?

Um diese Frage aufzulösen, so setze man die Zahl der Männer $= x$, und sehe dieselbe als bekant an, oder man verfahre damit als wann man die Probe machen wollte, ob dadurch der Frage ein Genüge geschähe. Da nun die Anzahl der Männer $= x$ ist und Männer und Weiber zusammen 20 Person ausmachen so kann man daraus die Anzahl der Weiber bestimmen, welche gefunden wird wann man die Zahl der Männer von 20 subtrahirt. Also war die Zahl der Weiber $= 20 - x$.

Da nun ein Mann 8 Gr. verzehrt, so werden diese x Männer verzehren $8x$ Gr. Und weil ein Weib 7 Gr. verzehrt, so werden diese $20 - x$ Weiber verzehren $140 - 7x$ Gr.

Also verzehren Männer und Weiber zusammen $140 + x$ Gr. Wir wißen aber wie viel sie verzehrt haben, nemlich 6 Rthl. welche zu Gr. gemacht 144 Gr. sind, daher erhalten wir diese Gleichung $140 + x = 144$ woraus man leicht sieht daß $x = 4$.

Dahero waren bey der Zeche 4 Männer und 16 Weiber.

6.

Eine andere Frage von gleicher Art:

20 Personen, Männer und Weiber, sind in einem Wirths-Haus. Die Männer verzehren 24 Fl. die Weiber verzehren auch 24 Fl. und es findet sich, daß ein Mann einen Gulden mehr als ein Weib hat zahlen müßen, wie viel waren es Männer und Weiber?

Es sey die Zahl der Männer $= x$ so ist die Zahl der Weiber $= 20 - x$.

Da nun diese x Männer 24 Fl. verzehrt haben, so hat ein Mann verzehrt $\frac{24}{x}$ Fl.

Und weil die $20 - x$ Weiber auch 24 Fl. verzehret haben, so hat ein Weib verzehrt $\frac{24}{20 - x}$. Diese Zeche eines Weibes ist nun um 1 weniger, als die Zeche eines Mannes. Wann man also von der Zeche eines Mannes 1 Fl. subtrahirt, so muß die Zeche eines Weibes heraus kommen; woraus man diese Gleichung erhält $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20 - x}$. Dieses ist also die Gleichung woraus der Werth von x gesucht werden muß, welcher nicht so leicht heraus gebracht werden kann wie bey der vorigen Frage. Aus dem folgenden aber wird man sehen daß $x = 8$ sey, welches auch der gefundenen Gleichung ein Genüge leistet $\frac{24}{8} - 1 = \frac{24}{12}$ das ist $2 = 2$.

7.

Bey allen Fragen kommt es nun darauf an, daß nachdem man die unbekanten oder gesuchten Zahlen durch Buchstaben angedeutet, die Umstände der Frage genau in Erwegung gezogen, und daraus Gleichungen hergeleitet werden. Hernach besteht die gantze Kunst darinn wie solche Gleichungen aufgelößet, und daraus der Werth der unbekandten Zahlen gefunden werden soll, und hievon soll in diesem Abschnitt gehandelt werden.

8.

Bey den Fragen selbst ereignet sich auch ein Unterscheid, in dem bey einigen nur eine unbekannte Zahl, bey andern aber zwey oder noch mehr gesucht werden sollen, in welchem letztern Fall zu mercken, daß dazu auch eben so viel besondere Gleichungen erfodert werden, welche aus den Umständen der Frage selbst hergeleitet werden müßen.

9.

Eine Gleichung bestehet demnach aus zwey Sätzen, deren einer dem andern gleich gesetzt wird. Um nun daraus den Werth der unbekanten Zahl herauszubringen, müßen öfters sehr viele Verwandelungen angestellet werden, welche sich aber alle darauf gründen, daß wann zwey Größen einander gleich sind, dieselben auch einander gleich bleiben, wann man zu beyden einerley Größen addirt oder davon subtrahirt; imgleichen auch wann dieselben durch einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden; ferner auch wann beyde zugleich zu Potestäten erhoben oder aus beyden gleichnahmigte Wurzeln ausgezogen, und endlich auch wann von beyden die Logarithmen genommen werden, wie schon allbereit im vorigen Abschnitt geschehen.

10.

Diejenigen Gleichungen, wo von der unbekanten Zahl nur die erste Potestät vorkommt, nach dem die Gleichung in Ordnung gebracht worden, sind am leichtesten aufzulösen, und werden Gleichungen vom ersten Grad genennet. Hernach folgen solche Gleichungen, worinnen die zweyte Potestät oder das Quadrat der unbekanten Zahl vorkommt, diese werden Quadratische Gleichungen, oder vom zweyten Grad genennt. Darauf folgen die Gleichungen vom dritten Grad oder die Cubischen worinnen der Cubus der unbekanten Zahl vorkommt, und so fort, von welchen allen in diesem Abschnitt gehandelt werden soll.

CAPITEL 2

VON DEN GLEICHUNGEN DES ERSTEN GRADS UND IHRER AUFLÖSUNG

11.

Wann die unbekante oder gesuchte Zahl durch den Buchstaben x angedeutet wird, und die heraus gebrachte Gleichung schon so beschaffen ist, daß der eine Satz blos allein das x und der andere Satz eine bekante Zahl