CAPITEL 4

VON DER SUMMATION DER ARITHMETISCHEN PROGRESSIONEN

412.

Wann eine Arithmetische Progression vorgelegt ist, so pflegt man auch die Summ derselben zu suchen, welche gefunden wird, wann man alle Glieder zusammen addirt. Da nun diese Addition sehr weitläuftig seyn würde wann die Progression aus sehr viel Gliedern besteht, so kann eine Regul gegeben werden, durch deren Hülfe diese Summ gantz leicht gefunden wird.

413.

Wir wollen erstlich eine solche bestimmte Progression betrachten, wo das erste Glied $= 2$, die Differenz $= 3$, das letzte Glied $= 29$, und die Anzahl der Glieder $=$ 10 ist.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10. \\ 2, & 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20, & 23, & 26, & 29. \end{array}$$

Hier ist nun die Summ des ersten und letzten Gliedes $= 31$, die Summa des zweyten und letzten ohne eins $= 31$, die Summa des dritten und letzten ohne zwey $= 31$, die Summa des vierten und letzten ohne drey $= 31$, und so ferner, woraus man sieht daß immer zwey Glieder die von dem ersten und letzten gleichweit entfernt sind, zusammen genommen, eben so viel ausmachen, als das erste und letzte zusammen.

414.

Der Grund davon fält auch so gleich in die Augen. Dann wann das erste Glied gesetzt wird $= a$ und das letzte $= z$, die Differenz aber $= d$, so ist die Summa des ersten und letzten $= a + z$. Hernach ist das zweyte Glied $a + d$ und das letzte ohne eins $= z - d$, welche zusammen genommen machen $a + z$. Ferner ist das dritte Glied $a + 2d$ und das letzte ohne zwey $= z - 2d$, welche zusammen betragen $a + z$. Woraus die Wahrheit des obigen Satzes erhellet.

415.

Um nun die Summa der obigen Progression zu finden, nemlich von

$$2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29,$$

so schreibe man darunter eben diese Progression rückwerts und addire Glied vor Glied wie folget

$$\begin{array}{r}
2+\ 5+\ 8+11+14+17+20+23+26+29\\
29+26+23+20+17+14+11+\ 8+\ 5+\ 2\\
\hline
31+31+31+31+31+31+31+31+31+31
\end{array}$$

welche gefundene und aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe offenbahr zweymal so groß ist als die Summa unserer Progression. Die Anzahl dieser gleichen Glieder ist 10, eben wie in der Progression, und also ist derselben Summa $= 10 \cdot 31 = 310$. Da nun diese Summa zwey mal so groß ist, als die Summa der Arithmetischen Progression, so wird die rechte Summa seyn $= 155$.

416.

Wann man auf diese Art mit einer jeglichen Arithmetischen Progression verfährt, wovon das erste Glied $= a$, das letzte $= z$, und die Anzahl der Glieder $= n$, indem man eben dieselbe Progression rückwerts darunter schreibt und Glied vor Glied addirt, so bekommt man für jedes Glied $a + z$, deren Anzahl $= n$, folglich ist die Summa derselben $= n(a + z)$ welche zweymal so groß ist, als die Summa der Progression, dahero ist die Summa der Arithmetischen Progression selbst $= \frac{n(a+z)}{2}$.

417.

Hieraus erlangen wir nun diese leichte Regul um die Summa einer jeglichen Arithmetischen Progression zu finden:

Man multiplicire die Summa des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder, so wird die Hälfte dieses Products die Summa der gantzen Progression anzeigen.

Oder welches auf eins läuft: man multiplicire die Summa des ersten und letzten Glieds mit der halben Anzahl der Glieder.

Oder auch, man multiplicire die halbe Summa des ersten und letzten Glieds mit der gantzen Anzahl der Glieder, so bekommt man die Summa der gantzen Progression.

418.

Es ist nöthig diese Regul mit einigen Exempeln zu erläutern. Es sey demnach gegeben die Progression der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, bis 100, von welchen die Summa gesucht werden soll. Diese wird nach der ersten Regul seyn $\frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$.

Es wird ferner gefragt, wie viel Schläge eine Schlag-Uhr in 12 Stunden thue? zu diesem Ende müßen die Zahlen 1, 2, 3, bis 12, zusammen addirt werden, die Summa wird also seyn $\frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$.

Wollte man die Summa von eben dieser Reihe bis 1000 fortgesetzt wißen, so würde dieselbe herauskommen 500500; bis 10000 fortgesetzt, wird dieselbe seyn $= 50005000$.

419.

Frage: Einer kauft ein Pferd mit dieser Bedingung: für den ersten Huffnagel zahlt er 5 Copeken, für den zweyten 8, für den dritten 11, und immer 3 Copeken mehr für einen jeden folgenden. Es sind aber in allem 32 Nägel, wie theuer kommt ihm das Pferd zu stehen?

Hier wird also die Summa von einer Arithmetischen Progression, deren erstes Glied $= 5$, die Differenz $= 3$, und die Anzahl der Glieder $= 32$ ist, gesuchet.

Hier muß nun zuförderst das letzte Glied gesucht werden, welches nach obiger Regul gefunden wird $= 5 + 31 \cdot 3 = 98$, und hieraus ergiebt sich die gesuchte Summa $\frac{103 \cdot 32}{2} = 103 \cdot 16$; also kommt das Pferd 1648 Copeken, oder 16 Rbl. 48 Cop. zu stehen.

420.

Es sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summa der gantzen Progression gefunden werden soll: da nun das letzte Glied seyn muß $= a + (n - 1)d$, so ist die Summa des ersten und letzten Gliedes $= 2a + (n - 1)d$, welche mit der Anzahl der Glieder n multiplicirt, giebt $2na + n(n - 1)d$, daher die gesuchte Summa seyn wird $= na + \frac{n(n-1)}{2} d$.

Nach dieser Formel, weil in dem obigen Exempel $a = 5$, $d = 3$, und $n = 32$ war, so erhält man die Summa

$$5 \cdot 32 + \frac{31 \cdot 32 \cdot 3}{2} = 160 + 1488 = 1648$$

wie vorher.

421.

Wann die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 und so fort bis n zusammen addirt werden soll, so hat man um diese Summa zu finden, das erste Glied $= 1$, das letzte $= n$ und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summa gefunden wird $\frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Setzt man $n = 1766$[1]), so wird die Summa aller Zahlen von 1 bis 1766 seyn $= 883 \cdot 1767 = 1560261$.

422.

Es sey gegeben die Progression der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 etc. welche bis auf n Glieder fortgesetzt sind, wovon die Summa verlangt wird:

Hier ist nun das erste Glied $= 1$, die Differenz $= 2$, die Anzahl der Glieder $= n$; daraus wird das letzte Glied seyn $1 + (n-1)2 = 2n - 1$, daraus erhält man die gesuchte Summa $= nn$.

Folglich darf man nur die Anzahl der Glieder mit sich selbst multipliciren. Man mag also von dieser Progression so viel Glieder zusammen addiren als man will, so ist die Summa immer ein Quadrat, nemlich das Quadrat der Anzahl der Glieder, wie aus folgendem zu ersehen.

Glied.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10 etc.
Prog.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19 etc.
Sum.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100 etc.

423.

Es sey ferner das erste Glied $= 1$, die Differenz $= 3$ und die Anzahl der Glieder $= n$, so hat man diese Progression 1, 4, 7, 10 etc. wovon das letzte Glied seyn wird: $1 + (n-1)3 = 3n - 2$; daher die Summa des ersten und letzten Glieds $= 3n - 1$; folglich die Summa der Progression $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$. Nimmt man $n = 20$, so ist die Summa $= 10 \cdot 59 = 590$.

424.

Es sey das erste Glied $= 1$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, so wird das letzte Glied seyn $1 + (n-1)d$. Hierzu das erste addirt, giebt $2 + (n-1)d$, mit der Anzahl der Glieder multiplicirt $2n + n(n-1)d$, woher die Summa der Progression seyn wird $n + \frac{n(n-1)d}{2}$.

1) Siehe die Anmerkung p. 3. H. W.

Hier wollen wir folgendes Täfelgen anhängen:

wann $d = 1$,	so ist die Summa	$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{nn+n}{2}$
„ $d = 2$	„ „ „ „	$n + \frac{2n(n-1)}{2} = nn$
„ $d = 3$	„ „ „ „	$n + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$
„ $d = 4$	„ „ „ „	$n + \frac{4n(n-1)}{2} = 2nn - n$
„ $d = 5$	„ „ „ „	$n + \frac{5n(n-1)}{2} = \frac{5nn-3n}{2}$
„ $d = 6$	„ „ „ „	$n + \frac{6n(n-1)}{2} = 3nn - 2n$
„ $d = 7$	„ „ „ „	$n + \frac{7n(n-1)}{2} = \frac{7nn-5n}{2}$
„ $d = 8$	„ „ „ „	$n + \frac{8n(n-1)}{2} = 4nn - 3n$
„ $d = 9$	„ „ „ „	$n + \frac{9n(n-1)}{2} = \frac{9nn-7n}{2}$
„ $d = 10$	„ „ „ „	$n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5nn - 4n$ etc.

CAPITEL 5

VON DEN FIGURIRTEN ODER VIELECKIGTEN ZAHLEN

425.

Die Summation der Arithmetischen Progressionen, welche von 1 anfangen und deren Differenz entweder 1 oder 2 oder 3 oder eine andere beliebige gantze Zahl ist, leitet uns auf die Lehre von den vieleckigten Zahlen, welche entstehen, wann man einige Glieder von solchen Progressionen zusammen addirt.

426.

Setzt man die Differenz $= 1$, indem das erste Glied beständig 1 ist, so entsteht daher diese Arithmetische Progression

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \text{ etc.}$$

Nimmt man nun in derselben die Summa von einem, zweyen, dreyen, vieren etc. Gliedern, so entsteht daraus diese Reihe von Zahlen

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 \text{ etc.}$$