CAPITEL 3

VON DEN ARITHMETISCHEN PROGRESSIONEN

402.

Eine Reihe Zahlen, welche immer um gleich viel wachsen oder abnehmen, aus so viel Gliedern dieselbe auch immer bestehen mag, wird eine Arithmetische Progression genennt.

Also machen die natürlichen Zahlen der Ordnung nach geschrieben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 etc., eine Arithmetische Progression weil dieselben immer um eins steigen und diese Reihe, als 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 etc., ist auch eine Arithmetische Progression, weil diese Zahlen immer um 3 abnehmen.

403.

Die Zahl um welche die Glieder einer Arithmetischen Progression größer oder kleiner werden, wird die Differenz oder der Unterscheid genennt. Wann also das erste Glied nebst der Differenz gegeben ist, so kann man die Arithmetische Progression so weit man will fortsetzen. Es sey z. E. das erste Glied $= 2$ und die Differenz $= 3$ so wird die steigende Progression seyn:

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ 26,\ 29 \text{ etc.}$$

wo ein jedes Glied gefunden wird, wann man zu dem vorhergehenden die Differenz addirt.

404.

Man pflegt über die Glieder einer solchen Arithmetischen Progression die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. zu schreiben, damit man so gleich sehen könne das wie vielte Glied ein jegliches sey, und die also darüber geschriebene Zahlen werden die Zeiger genennt, das obige Exempel kommt daher also zu stehen:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	
Arith. Prog.	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29	etc.

woraus man sieht daß 29 das zehnte Glied sey.

405.

Es sey a das erste Glied und d die Differenz so wird die Arithmetische Progression also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, \\ a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+5d, & a+6d, & a+7d \text{ etc.} \end{array}$$

woraus so gleich ein jegliches Glied gefunden werden kann, ohne daß man nöthig habe alle vorhergehende zu wißen und dieses blos allein aus dem ersten Glied a und der Differenz d. Also wird z. E. das 10te Glied seyn $= a + 9d$, das 100te $= a + 99d$, und auf eine allgemeine Art wird das $n$te Glied seyn $a + (n-1)d$.

406.

Wann die Arithmetische Progression irgendwo abgebrochen wird, so hat man insonderheit das erste Glied und das letzte zu bemercken, und der Zeiger des letzten wird die Anzahl der Glieder anzeigen. Wenn also das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$ und die Anzahl der Glieder $= n$, so ist das letzte Glied $= a + (n-1)d$. Dasselbe wird also gefunden wann man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt, und dazu das erste Glied addirt. Man habe z. E. eine Arithmetische Progression von 100 Gliedern, wovon das erste $= 4$ und die Differenz $= 3$ so wird das letzte Glied seyn $99 \cdot 3 + 4 = 301$.

407.

Hat man das erste Glied $= a$ und das letzte $= z$ nebst der Anzahl der Glieder $= n$ so kann man daraus die Differenz $= d$ finden. Dann da das letzte Glied ist $z = a + (n-1)d$, so subtrahire man beyderseits a so hat man $z - a = (n-1)d$. Wann man also von dem letzten Glied das erste subtrahirt, so hat man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt; oder $z - a$ ist das Product von $(n-1)$ in d. Man darf also nur $z - a$ durch $n - 1$ dividiren, so bekommt man die Differenz $d = \frac{z-a}{n-1}$, woraus diese Regul entspringt: Man subtrahirt vom letzten Glied das erste, den Rest theilt man durch die Anzahl der Glieder weniger eins, so bekommt man die Differenz; woraus man hernach die ganze Progression hinsetzen kann.

408.

Es hat z. E. einer eine Arithmetische Progression von 9 Gliedern, wovon das erste Glied 2 und das letzte 26, von welcher die Differenz gesucht werden soll. Man muß also das erste Glied 2 von dem letzten 26 subtrahiren und den Rest 24 durch $9-1$, das ist durch 8 dividiren, so bekommt man die Differenz $=3$, und die Progression selbst wird seyn:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9. \\ 2, & 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20, & 23, & 26. \end{array}$$

Um ein ander Exempel zu geben; so sey das erste Glied 1, das letzte 2, und die Anzahl der Glieder 10, wovon die Arithmetische Progression verlangt wird. Hier bekommt man also zur Differenz $\frac{2-1}{10-1}=\frac{1}{9}$; woraus die verlangte Progression seyn wird:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10. \\ 1, & 1\frac{1}{9}, & 1\frac{2}{9}, & 1\frac{3}{9}, & 1\frac{4}{9}, & 1\frac{5}{9}, & 1\frac{6}{9}, & 1\frac{7}{9}, & 1\frac{8}{9}, & 2. \end{array}$$

Noch ein Exempel. Es sey das erste Glied $2\frac{1}{3}$, das letzte $12\frac{1}{2}$ und die Anzahl der Glieder 7. Hieraus erhält man die Differenz

$$\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1}=\frac{10\frac{1}{6}}{6}=\frac{61}{36}=1\frac{25}{36};$$

folglich wird die Progression seyn:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7. \\ 2\frac{1}{3}, & 4\frac{1}{36}, & 5\frac{13}{18}, & 7\frac{5}{12}, & 9\frac{1}{9}, & 10\frac{29}{36}, & 12\frac{1}{2}. \end{array}$$

409.

Wann ferner das erste Glied a und das letzte z, sammt der Differenz d gegeben ist, so kann man daraus die Anzahl der Glieder n finden. Dann da $z-a=(n-1)d$, so dividire man beyderseits mit d und da bekommt man $\frac{z-a}{d}=n-1$. Da nun n um eins größer ist als $n-1$, so wird $n=\frac{z-a}{d}+1$; folglich findet man die Anzahl der Glieder, wann man den Unterscheid zwischen dem ersten und letzten Glied $z-a$ durch die Differenz dividiret und zum Quotient $\frac{z-a}{d}$ noch eins addirt.

Es sey z. E. das erste Glied $=4$, das letzte $=100$, und die Differenz $=12$, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{100-4}{12}+1=9$, und diese neun Glieder sind folgende:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9. \\ 4, & 16, & 28, & 40, & 52, & 64, & 76, & 88, & 100. \end{array}$$

Es sey das erste Glied $= 2$, das letzte $= 6$, und die Differenz $= 1\frac{1}{3}$ so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{4}{1\frac{1}{3}} + 1 = 4$, und diese vier Glieder sind

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4. \\ 2, & 3\frac{1}{3}, & 4\frac{2}{3}, & 6. \end{array}$$

Es sey ferner das erste Glied $= 3\frac{1}{3}$, das letzte $= 7\frac{2}{3}$, und die Differenz $= 1\frac{4}{9}$, so wird die Anzahl der Glieder $= \frac{7\frac{2}{3} - 3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}} + 1 = 4$, und diese vier Glieder sind

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4. \\ 3\frac{1}{3}, & 4\frac{7}{9}, & 6\frac{2}{9}, & 7\frac{2}{3}. \end{array}$$

410.

Es ist aber hier wohl zu mercken, daß die Anzahl der Glieder nothwendig eine gantze Zahl seyn muß. Wann man also bey obigem Exempel für n einen Bruch gefunden hätte, so wäre die Frage ungereimt gewesen.

Wann folglich für $\frac{z-a}{d}$ keine gantze Zahl gefunden würde so lies sich diese Frage nicht auflösen, und man müßte antworten, daß die Frage unmöglich wäre. Dahero muß sich bey dergleichen Fragen die Zahl $z - a$ durch d theilen laßen.

411.

Bey einer jeden Arithmetischen Progression kommen also folgende vier Stücke zu betrachten vor:

I. das erste Glied a,	III. das letzte Glied z,
II. die Differenz d,	IV. die Anzahl der Glieder n,

welche so beschaffen sind, daß wann drey derselben bekant, das vierte daraus bestimmt werden kann, als:

I. Wann a, d u. n bekandt sind, so hat man $z = a + (n-1)d$.

II. Wann z, d u. n bekandt sind, so hat man $a = z - (n-1)d$.

III. Wann a, z u. n bekandt sind, so hat man $d = \frac{z-a}{n-1}$.

IV. Wann a, z u. d bekandt sind, so hat man $n = \frac{z-a}{d} + 1$.