2)	1,000 000 000 000 00
3)	0,500 000 000 000 00
4)	0,166 666 666 666 66
5)	0,041 666 666 666 66
6)	0,008 333 333 333 33
7)	0,001 388 888 888 88
8)	0,000 198 412 698 41
9)	0,000 024 801 587 30
10)	0,000 002 755 731 92
	0,000 000 275 573 19

CAPITEL 13

VON DEN INTERESSEN-RECHNUNGEN

540.

Die Interessen oder Zinsen von einem Capital pflegen in Procento ausgedrückt zu werden, indem man sagt wie viel von 100 jährlich bezahlt werden. Gemeiniglich wird das Geld zu 5 p. C. ausgelegt, also daß von 100 Rthl. jährlich 5 Rthl. Interessen gezahlt werden. Hieraus ist nun klar und leicht, den Zins von einem jeglichen Capital zu berechnen, indem man nach der Regeldetri sagt:

100 geben 5 was giebt das gegebene Capital. Es sey z. E. das Capital 860 Rthl. so findet man den jährlichen Zins

$$100 : 5 = 860 \text{ zu} \ldots \qquad \text{Antwort 43 Rthl.}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 100)\ 4300 \\ \hline 43 \end{array}$$

541.

Bey Berechnung dieses einfachen Interesse wollen wir uns nicht aufhalten, sondern die Interessen auf Interessen betrachten, da jährlich die Zinsen wieder zum Capital geschlagen und dadurch das Capital vermehret wird, wobey dann gefragt wird: Wie hoch ein gegebenes Capital nach Verfließung einiger Jahre anwachse? Da nun das Capital jährlich größer wird, indem zu 5 Proc. 100 Rthl. nach einem Jahr zu 105 anwachsen so kann man daraus finden, wie groß ein jegliches Capital nach Verfließung eines Jahres werden müße?

Es sey das Capital $= a$ so wird solches nach einem Jahre gefunden, wann man sagt 100 geben 105 was giebt a; Antwort $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$, welches auch also geschrieben werden kann $\frac{21}{20} \cdot a$ oder $a + \frac{1}{20} \cdot a$.

542.

Wann allso zu dem gegenwärtigen Capital sein 20ster Theil addirt wird, so bekommt man das Capital für das folgende Jahr. Wann man nun zu diesem wieder seinen 20sten Theil addirt, so findet man das Capital für das zweyte Jahr; und zu diesem wieder sein 20ster Theil addirt, giebt das Capital für das dritte Jahr, und so fort. Hieraus ist leicht zu sehen, wie das Capital jährlich anwächst, und kann diese Rechnung so weit fortgesetzt werden, als man will.

543.

Es sey das Capital anjetzo 1000 Rthl. welches zu 5 p. C. angelegt ist und die Zinsen davon jährlich wieder zum Capital geschlagen werden; weil nun die besagte Rechnung bald auf Brüche führen wird, so wollen wir solche in Decimal-Brüchen ausdrücken, nicht weiter aber als bis auf 1000ste Theile eines Rthl. gehen, weil kleinere Theilchen hier in keine Betrachtung kommen.

Gegenwärtiges Capital 1000 Rthl. wird

nach 1 Jahr	1050 Rthl.	
	52,5	
nach 2 Jahren	1102,5	
	55,125	
nach 3 Jahren	1157,625	
	57,881	
nach 4 Jahren	1215,506	
	60,775	
nach 5 Jahren	1276,281	etc.

544.

Solcher Gestalt kann man auf so viele Jahre fortgehen als man will; wann aber die Anzahl der Jahre sehr groß ist, so wird diese Rechnung sehr weitläuftig und mühsam; dieselbe läßt sich aber folgender gestalt abkürtzen.

Es sey das gegenwärtige Capital $= a$ und da ein Capital von 20 Rthl. nach einem Jahr 21 Rthl. beträgt, so wird das Capital a nach einem Jahr auf $\frac{21}{20} \cdot a$ anwachsen. Ferner im folgenden Jahr auf $\frac{21^2}{20^2} \cdot a = \left(\frac{21}{20}\right)^2 \cdot a$. Dieses ist nun das Capital nach zweyen Jahren, welches in einem Jahr wieder anwächst auf $\left(\frac{21}{20}\right)^3 \cdot a$, welches das Capital nach drey Jahren seyn wird; nach vier Jahren wird nun dasselbe seyn $\left(\frac{21}{20}\right)^4 \cdot a$; nach fünf Jahren $\left(\frac{21}{20}\right)^5 \cdot a$; nach 100 Jahren $\left(\frac{21}{20}\right)^{100} \cdot a$, und allgemein nach n Jahren wird dasselbe seyn $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a$; woraus man nach einer jeglichen beliebigen Zahl von Jahren die Größe des Capitals finden kann.

545.

Der hier vorkommende Bruch $\frac{21}{20}$ gründet sich darauf, daß das Interesse zu 5 Pr. gerechnet wird, und $\frac{21}{20}$ so viel ist als $\frac{105}{100}$. Sollte nun das Interesse zu 6 Pr. gerechnet werden, so würde das Capital a nach einem Jahr anwachsen auf $\frac{106}{100} \cdot a$; nach zwey Jahren auf $\left(\frac{106}{100}\right)^2 \cdot a$; und nach n Jahren auf $\left(\frac{106}{100}\right)^n \cdot a$.

Sollte aber das Interesse nur 4 Pr. betragen, so würde das Capital a nach n Jahren anwachsen auf $\left(\frac{104}{100}\right)^n \cdot a$.

546.

Wann nun, so wohl das Capital a als die Anzahl der Jahre gegeben ist, so kann man diese Formel leicht auflößen nemlich durch die Logarithmen. Dann man darf nur den Logarithmus von dieser Formel suchen, welche zu 5 Proc. ist $\left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a$. Da nun dieselbe ein Product ist von $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ und a, so ist ihr Logarithmus $= \mathfrak{l}\left(\frac{21}{20}\right)^n + \mathfrak{l}a$. Da weiter $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ eine Potestät ist, so ist $\mathfrak{l}\left(\frac{21}{20}\right)^n = n\,\mathfrak{l}\frac{21}{20}$. Dahero ist der Logarithmus von dem gesuchten Capital $= n \cdot \mathfrak{l}\frac{21}{20} + \mathfrak{l}a$. Es ist aber der Logarithmus des Bruchs $\frac{21}{20} = \mathfrak{l}21 - \mathfrak{l}20$.

547.

Es sey nun das Capital $= 1000$ Rthl. und man fragt wie groß daßelbe nach 100 Jahren zu 5 p. C. seyn werde?

Hier ist also $n = 100$. Der Logarithmus von diesem gesuchten Capital wird nun seyn $= 100\,\mathfrak{l}\frac{21}{20} + \mathfrak{l}\,1000$, welcher folgender Gestalt berechnet wird

$$\begin{array}{rr} \mathfrak{l}\,21 = & 1{,}3222193 \\ \text{subtr. } \mathfrak{l}\,20 = & 1{,}3010300 \\ \hline \mathfrak{l}\frac{21}{20} = & 0{,}0211893 \\ \text{multipl. mit } 100 & \\ \hline 100\,\mathfrak{l}\frac{21}{20} = & 2{,}1189300 \\ \text{addirt } \mathfrak{l}\,1000 = & 3{,}0000000 \\ \hline & 5{,}1189300 \end{array}$$

dieses ist der Logarithmus des gesuchten Capitals und die Zahl desselben wird also aus 6 Figuren bestehen und also heißen 131501 Rthl.

548.

Ein Capital von 3452 Rthl. zu 6 Procento, wie groß wird dasselbe nach 64 Jahren?

Hier ist also $a = 3452$ und $n = 64$. Also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 64\,\mathfrak{l}\frac{53}{50} + \mathfrak{l}\,3452$, welches also berechnet wird:

$$\begin{array}{rr} \mathfrak{l}\,53 = & 1{,}7242759 \\ \text{subtr. } \mathfrak{l}\,50 = & 1{,}6989700 \\ \hline \mathfrak{l}\frac{53}{50} = & 0{,}0253059 \\ \hline \text{mult. mit } 64;\ 64\,\mathfrak{l}\frac{53}{50} = & 1{,}6195776 \\ \mathfrak{l}\,3452 = & 3{,}5380708 \\ \hline & 5{,}1576484 \end{array}$$

Also das gesuchte Capital $= 143763$ Rthl.

549.

Wann die Anzahl der Jahre sehr groß ist, und weil damit der Logarithmus eines Bruchs multiplicirt werden muß, die Logarithmus in den Tabellen aber nur auf 7 Figuren berechnet worden, so könnte daraus ein mercklicher Fehler entstehen. Dahero muß der Logarithmus des Bruchs auf mehrere Figuren genommen werden, wie aus folgendem Exempel zu ersehen: Ein Capital von einem Rthl. zu 5 p. C. bleibt 500 Jahr lang stehen, da inzwischen die jährliche Zinse immer dazu geschlagen worden. Nun fragt sich, wie groß dieses Capital nach 500 Jahren seyn werde?

Hier ist also $a = 1$ und $n = 500$: also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 500\,\mathfrak{l}\frac{21}{20} + \mathfrak{l}1$, woraus diese Rechnung entspringt

$$\begin{array}{rl} & \mathfrak{l}21 = 1{,}322\,219\,294\,733\,919 \\ \text{subtrahirt} & \mathfrak{l}20 = 1{,}301\,029\,995\,663\,981 \\ \hline & \mathfrak{l}\frac{21}{20} = 0{,}021\,189\,299\,069\,938 \\ \hline \text{mult. mit 500 gibt} & 10{,}594\,649\,534\,969\,000 \end{array}$$

dieses ist nun der Logarithmus des gesuchten Capitals, welches dahero selbsten seyn wird $= 39\,323\,200\,000$ Rthl.

550.

Wann man aber jährlich zu dem Capital nicht nur die Interesse schlagen, sondern noch jährlich eine neue Summa $= b$ darzu legen wollte, so wird das gegenwärtige Capital alle Jahr anwachsen wie folget. Gegenwärtig hat man a;

$$\begin{array}{ll} \text{nach } 1 \text{ Jahr} & \frac{21}{20}a + b \\ \text{nach } 2 \text{ Jahr} & \left(\frac{21}{20}\right)^2 a + \frac{21}{20}b + b \\ \text{nach } 3 \text{ Jahr} & \left(\frac{21}{20}\right)^3 a + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \frac{21}{20}b + b \\ \text{nach } 4 \text{ Jahr} & \left(\frac{21}{20}\right)^4 a + \left(\frac{21}{20}\right)^3 b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \frac{21}{20}b + b \\ \text{nach } n \text{ Jahr} & \left(\frac{21}{20}\right)^n a + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} b + \cdots + \frac{21}{20}b + b. \end{array}$$

Dieses Capital besteht aus zwey Theilen, davon der erste $= \left(\frac{21}{20}\right)^n a$, der andere aber aus dieser Reihe rückwerts geschrieben

$$b + \left(\frac{21}{20}\right)b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \left(\frac{21}{20}\right)^3 b + \cdots + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b$$

besteht, welches eine Geometrische Progression ist, deren Nenner $= \frac{21}{20}$. Die Summe davon wird nun also gefunden:

Man multiplicirt das letzte Glied $\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1}b$ mit dem Nenner $\frac{21}{20}$, so bekommt man $\left(\frac{21}{20}\right)^{n}b$, davon subtrahirt man das erste Glied b, so bleibt $\left(\frac{21}{20}\right)^{n}b-b$. Dieses muß durch 1 weniger als der Nenner ist dividirt werden, das ist durch $\frac{1}{20}$; dahero wird die Summe der obigen Progression $=20\left(\frac{21}{20}\right)^{n}b-20b$; folglich wird das gesuchte Capital seyn:

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{n}a+20\cdot\left(\frac{21}{20}\right)^{n}b-20b=\left(\frac{21}{20}\right)^{n}\cdot(a+20b)-20b.$$

551.

Um nun dieses auszurechnen, so muß man das erste Glied $\left(\frac{21}{20}\right)^{n}(a+20b)$ besonders betrachten und berechnen, welches geschieht, wann man den Logarithmus desselben sucht welcher ist $n\,\mathfrak{l}\frac{21}{20}+\mathfrak{l}(a+20b)$. Zu diesem sucht man in den Tabellen die gehörige Zahl, so hat man das erste Glied; davon subtrahirt man $20b$, so bekommt man das gesuchte Capital.

552.

Frage: Einer hat ein Capital von 1000 Rthl. zu 5 p. C. ausstehen, wozu er jährlich außer den Zinsen noch 100 Rthl. hinzulegt, wie groß wird dieses Capital nach 25 Jahren seyn?

Hier ist also $a=1000$; $b=100$; $n=25$; dahero wird die Rechnung stehen wie folget:

$$\begin{array}{r}
\mathfrak{l}\frac{21}{20}=0{,}021189299\\
\hline
\text{multiplic. mit 25 giebt}\\
\hline
25\,\mathfrak{l}\frac{21}{20}=0{,}5297324750\\
\mathfrak{l}(a+20b)=3{,}4771212547\\
\hline
4{,}0068537297
\end{array}$$

Also ist der erste Theil 10159,1 Rthl. davon subtrahirt $20b=2000$, so ist das Capital nach 25 Jahren werth 8159,1 Rthl.

553.

Da nun das Capital immer größer wird und nach 25 Jahren auf $8159\frac{1}{10}$ Rthl. angewachsen, so kann man weiter fragen nach wie viel Jahren dasselbe bis auf 1000000 Rthl. anwachsen werde?

Es sey n diese Anzahl von Jahren, und weil $a = 1000$, $b = 100$ so wird nach n Jahren das Capital seyn:

$$\left(\frac{21}{20}\right)^n (3000) - 2000$$

dieses muß nun 1000000 Rthl. seyn, woraus diese Gleichung entspringt:

$$3000\left(\frac{21}{20}\right)^n - 2000 = 1000000.$$

Man addire beyderseits 2000, so bekommt man

$$3000\left(\frac{21}{20}\right)^n = 1002000$$

Man dividire beyderseits durch 3000 so hat man $\left(\frac{21}{20}\right)^n = 334$. Hiervon nehme man die Logarithmus, so hat man $n \cdot \mathfrak{l}\frac{21}{20} = \mathfrak{l}334$. Hier dividirt man durch $\mathfrak{l}\frac{21}{20}$, so kommt $n = \frac{\mathfrak{l}334}{\mathfrak{l}\frac{21}{20}}$. Nun aber ist $\mathfrak{l}334 = 2{,}5237465$ und $\mathfrak{l}\frac{21}{20} = 0{,}0211893$; dahero wird $n = \frac{2{,}5237465}{0{,}0211893}$. Man multiplicire oben und unten mit 10000000, so kommt $n = \frac{25237465}{211893}$, das ist 119 Jahr 1 Monath 7 Tage, und nach so langer Zeit wird das Capital anwachsen auf 1000000 Rthl.

554.

Wann aber anstatt daß alle Jahr etwas zum Capital gelegt wird, etwas davon weggenommen wird, so man auf seinen Unterhalt verwendet, und diese Summe $= b$ gesetzt wird, so wird das zu 5 p. C. angelegte Capital a folgender Gestalt fortgehen: Gegenwärtig ist es a;

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a - b$

nach 2 Jahren $\left(\frac{21}{20}\right)^2 a - \frac{21}{20}b - b$

nach 3 Jahren $\left(\frac{21}{20}\right)^3 a - \left(\frac{21}{20}\right)^2 b - \frac{21}{20}b - b$

nach n Jahren $\left(\frac{21}{20}\right)^n a - \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b - \left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} b - \cdots - \left(\frac{21}{20}\right) b - b.$

555.

Dasselbe wird uns also in zwey Stücken vorgelegt, das erste ist $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$; davon wird subtrahirt diese Geometrische Progression rückwärts geschrieben

$b + \frac{21}{20}b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \cdots \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b$. Hiervon ist oben die Summe gefunden worden $= 20\left(\frac{21}{20}\right)^n b - 20b$, welche von dem ersten $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ subtrahirt, das nach n Jahren gesuchte Capital giebt $\left(\frac{21}{20}\right)^n (a - 20b) + 20b$.

556.

Diese Formel hätte so gleich aus der vorigen geschloßen werden können. Dann da vorher jährlich b addirt wurde, so wird nun jährlich b subtrahirt. Also darf man in der vorhergehenden Formel anstatt $+b$ nur $-b$ schreiben. Hier ist nun insonderheit zu mercken, daß wann $20b$ größer ist, als a so wird das erste Glied negativ und also das Capital immer kleiner; welches vor sich offenbahr ist, dann wann vom Capital jährlich mehr weggenommen wird, als der Zins beträgt, so muß dasselbe alle Jahr kleiner werden und endlich gar verschwinden; welches wir mit einem Exempel erläutern wollen.

557.

Einer hat ein Capital von 100000 Rthl. zu 5 p. C. ausstehen; braucht alle Jahr zu seinem Unterhalt 6000 Rthl. welches mehr ist als das Interesse von 100000 Rthl. so nur 5000 Rthl. beträgt, dahero das Capital immer kleiner wird. Nun ist die Frage nach wie viel Jahren dasselbe gäntzlich verschwinden werde?

Vor diese Anzahl Jahre setze man n, und da $a = 100000$ Rthl. und $b = 6000$, so wird nach n Jahren das Capital seyn $= -20000\left(\frac{21}{20}\right)^n + 120000$ oder $120000 - 20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$. Also verschwindet das Capital wann $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$ auf 120000 anwächst oder wann $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n = 120000$. Man dividire durch 20000, so kommt $\left(\frac{21}{20}\right)^n = 6$. Man nehme die Logarithmus, so kommt $n\,\mathrm{l}\frac{21}{20} = \mathrm{l}\,6$. Man dividire durch $\mathrm{l}\frac{21}{20}$, so findet man

$$n = \frac{\mathrm{l}\,6}{\mathrm{l}\frac{21}{20}} = \frac{0,7781513}{0,0211893}, \text{ oder } n = \frac{7781513}{211893}$$

folglich wird $n = 36$ Jahr 8 Monath 22 Tage: und nach so vieler Zeit wird es verschwinden.

558.

Hier ist noch nöthig zu zeigen, wie nach diesem Grund die Interessen auch vor eine kleinere Zeit als gantze Jahre berechnet werden können. Hierzu dient nun auch die oben gefundene Formel, daß ein Capital zu 5 p. C. nach n Jahren auf $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ anwächst; ist nun die Zeit kleiner als ein Jahr, so wird der Exponent n ein Bruch und die Rechnung kann wie vorher durch Logarithmus gemacht werden. Sollte das Capital nach einem Tage gesucht werden, so muß man setzen $n = \frac{1}{365}$; will man es nach zwey Tagen wißen, so wird $n = \frac{2}{365}$ etc.

559.

Es sey das Capital $a = 100000$ Rthl. zu 5 p. C. wie groß wird solches nach 8 Tagen seyn?

Hier ist

$a = 100000$ und $n = \frac{8}{365}$; folglich wird das Capital seyn $\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} 100000$.

Hiervon ist der Logarithmus

$$= \mathfrak{l}\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} + \mathfrak{l}\,100000 = \frac{8}{365}\,\mathfrak{l}\,\frac{21}{20} + \mathfrak{l}\,100000.$$

Nun aber ist	$\mathfrak{l}\,\frac{21}{20} = 0{,}0211893$
dieser mit $\frac{8}{365}$ multiplicirt giebt	$0{,}0004644$
hierzu ad. $\mathfrak{l}\,100000$ welcher ist	$5{,}0000000$
	$5{,}0004644$

so erhält man den Logarithmus von dem Capital $= 5{,}0004644$. Folglich ist das Capital selbst 100107 Rthl. so daß in den ersten 8 Tagen das Interesse schon 107 Rthl. austrägt.

560.

Hierher gehören noch andere Fragen, welche darauf gehen, wann eine Summa Geld erst nach einigen Jahren verfällt, wie viel dieselbe anjetzo werth sey. Hier ist zu betrachten, daß da 20 Rthl. über ein Jahr 21 Rthl. austragen, so sind hinwiederum 21 Rthl. die nach einem Jahr zahlbar sind, anjetzo nur 20 Rthl. werth. Wann also das nach einem Jahr verfallene Capital a gesetzt wird, so ist desselben Werth $\frac{20}{21}a$. Um also zu finden wie viel das Capital a, so zu einer gewißen Zeit verfällt ein Jahr früher werth ist, so muß man daßelbe multipliciren mit $\frac{20}{21}$; zwey Jahr früher wird desselben Werth seyn $\left(\frac{20}{21}\right)^2 a$; drey Jahr früher ist dasselbe $\left(\frac{20}{21}\right)^3 a$ und überhaupt n Jahr früher ist der Werth desselben $\left(\frac{20}{21}\right)^n a$.

561.

Einer genießt auf 5 Jahr lang eine jährliche Rente von 100 Rthl. dieselbe wollte er nun jetzt für baares Geld zu 5 p. C. verkaufen, wie viel wird er dafür bekommen?

Für die 100 Rthl. welche verfallen

nach 1 Jahr	bekommt	er	95,239
nach 2 Jahren	„	„	90,704
nach 3 Jahren	„	„	86,385
nach 4 Jahren	„	„	82,272
nach 5 Jahren	„	„	78,355
Summa aller 5 Jahren	bekommt	er	432,955

Also kan er vor diese Rente nicht mehr fordern als 432,955 Rthl. oder 432 Rthl. 22 Gr. 11 Pf.

562.

Sollte aber eine Rente viel mehr Jahre lang dauren, so würde die Rechnung auf diese Art sehr mühsam werden, welche aber folgender Gestalt erleichtert werden kann:

Es sey die jährliche Rente $= a$, welche jetzo schon anfängt und n Jahre lang dauret, so wird dieselbe anjetzo werth seyn:

$$a + \tfrac{20}{21}a + \left(\tfrac{20}{21}\right)^2 a + \left(\tfrac{20}{21}\right)^3 a + \left(\tfrac{20}{21}\right)^4 a + \cdots + \left(\tfrac{20}{21}\right)^n a.$$

Dieses ist nun eine Geometrische Progression deren Summe gefunden werden muß. Man multiplicirt also das letzte Glied mit dem Nenner, so hat man $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$; davon das erste Glied subtrahirt, bleibt $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a - a$; dieses muß mit dem Nenner weniger eins, das ist, mit $-\frac{1}{21}$ dividirt, oder welches gleich viel, mit -21 multiplicirt werden: dahero wird die gesuchte Summe seyn $= -21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a + 21a$, das ist $21a - 21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$, wovon das letztere Glied, so subtrahirt werden soll, leicht durch Logarithmus berechnet werden kann.

ENDE DES ERSTEN THEILS
UND DES DRITTEN ABSCHNITTS VON DEN VERHÄLTNISSEN
UND PROPORTIONEN