CAPITEL 11

VON DEN GEOMETRISCHEN PROGRESSIONEN

505.

Eine Reihe Zahlen, welche immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, wird eine Geometrische Progression genennt, weil immer ein jedes Glied zu dem folgenden in eben demselben Geometrischen Verhältniße stehet, und die Zahl welche anzeigt wie viel mal ein jedes Glied größer ist, als das vorhergehende, wird der Nenner genennt; wann also das erste Glied 1 ist und der Nenner $= 2$, so ist die Geometrische Progression folgende:

Glieder	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Prog.	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512 etc.

wo wir die Zeichen darüber gesetzt haben um anzuzeigen das wie vielte Glied ein jedes sey.

506.

Wann man überhaupt das erste Glied $= a$ und den Nenner $= b$ setzt, so kommt die Geometrische Progression also zu stehen:

$$\begin{array}{lccccccccc} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 & \ldots n \\ \text{Prog.} & a, & ab, & ab^2, & ab^3, & ab^4, & ab^5, & ab^6, & ab^7 & \ldots ab^{n-1} \end{array}$$

Wann also diese Progression aus n Gliedern besteht, so ist das letzte $= ab^{n-1}$. Hier ist zu mercken, wann der Nenner b größer ist als 1, daß die Glieder immer größer werden, ist aber der Nenner $b = 1$ so bleiben die Glieder immer einander gleich, und ist der Nenner b kleiner als 1, oder ein Bruch, so werden die Glieder auch immer kleiner. Also wann $a = 1$ und $b = \frac{1}{2}$, so bekommt man diese Geometrische Progression:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{128} \text{ etc.}$$

507.

Hierbey kommen nachfolgende Stücke zu betrachten vor

I.) das erste Glied, welches hier a genennt wird,
II.) der Nenner, welcher hier b genennt wird,
III.) die Anzahl der Glieder, welche $= n$ gesetzt worden,
IV.) das letzte Glied, welches gefunden worden $= ab^{n-1}$.

Dahero wann die drey ersten Stücke gegeben sind, so wird das letzte Glied gefunden wann man die $n-1^{\text{te}}$ Potestät des Nenners b, das ist b^{n-1}, mit dem ersten Glied a multiplicirt.

Wollte man nun von dieser Geometrischen Progression: 1, 2, 4, 8, etc. das 50^{te} Glied wißen, so ist hier $a=1$, $b=2$ und $n=50$. Dahero das 50^{te} Glied seyn wird $=2^{49}$. Da nun $2^9=512$, so ist $2^{10}=1024$. Hiervon das Quadrat genommen giebt $2^{20}=1048576$. Hiervon wieder das Quadrat genommen giebt $2^{40}=1099511627776$. Wann man nun 2^{40} mit $2^9=512$ multiplicirt, so bekommt man $2^{49}=512\cdot 1099511627776=562949953421312$.

508.

Hiebey pflegt nun insonderheit gefragt zu werden, wie man die Summe von allen Gliedern einer solchen Progression finden soll, welches wir hier folgender Gestalt zeigen wollen. Es sey erstlich diese Progression von zehn Gliedern gegeben 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 wovon wir die Summe durch den Buchstaben s andeuten wollen, also daß

$$s=1+2+4+8+16+32+64+128+256+512$$

so wird dieses doppelt genommen geben:

$$2s=2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024.$$

Hiervon nehme man nun die obige Progression weg, so bleibt übrig:

$$s=1024-1=1023;\ \text{also ist die gesuchte Summe } =1023.$$

509.

Laßt uns nun bey eben dieser Progression die Anzahl der Glieder unbestimmt annehmen und $=n$ setzen, also daß die Summe seyn wird

$$s=1+2+2^2+2^3+\cdots\cdot 2^{n-1}.$$

Dieses mit 2 multiplicirt giebt

$$2s=2+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdot\cdot 2^n;$$

von diesem subtrahirt man jenes so bekommt man $s=2^n-1$. Dahero wird die gesuchte Summe gefunden, wann man das letzte Glied 2^{n-1} mit dem Nenner 2 multiplicirt um zu bekommen 2^n, und von diesem Product 1 subtrahirt.

510.

Dieses wollen wir durch folgende Exempel, indem wir vor n nach und nach 1, 2, 3, 4 etc. schreiben werden, erläutern als

$$1 = 1,\ 1 + 2 = 3,\quad 1 + 2 + 4 = 7,\quad 1 + 2 + 4 + 8 = 15,$$
$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31,\quad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63.\ \text{etc.}$$

511.

Hier pflegt diese Frage vorzukommen: Einer verkauft sein Pferd nach den Huffnägeln, deren 32 sind: für den ersten Nagel fordert er 1 Pfennig, für den zweyten 2 Pfennig, für den dritten 4 Pfennig, für den vierten 8 Pfennig und immer für den folgenden zwey mal so viel als für den vorigen. Nun ist die Frage, wie hoch dieses Pferd verkauft worden?

Hier muß also diese Geometrische Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. bis auf das 32te Glied fortgesetzt und die Summe von allen gesucht werden. Da nun das letzte Glied seyn wird $= 2^{31}$, so ist oben schon gefunden worden $2^{20} = 1048576$, dieses multiplicirt man mit $2^{10} = 1024$, um zu haben $2^{30} = 1073741824$. Dieses mit 2 multiplicirt giebt das letzte Glied $2^{31} = 2147483648$; folglich wird die Summe gleich seyn dieser Zahl doppelt genommen weniger 1: das ist 4294967295 Pfenige;

2)	4294967295	Pf.
6)	2147483647	(1
oder	357913941	Gr. 3 Pf.
3)	357913941	
8)	119304647	
oder	14913080	Rthl. 21 Gr. 3 Pf.

Allso wird der Preiß des Pferdes seyn 14913080 Rthl. 21 Gr. 3 Pf.

512.

Es sey nun der Nenner $= 3$ und die Geometrische Progression sey 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, und von diesen 7 Gliedern soll die Summe gefunden werden. Man setze dieselbe so lange $= s$, also daß:

$$s = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729.$$

Man multiplicire mit 3 um zu haben

$$3s = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187.$$

Hiervon subtrahire man die obige Reihe, so bekommt man $2s = 2187 - 1 = 2186$. Dahero ist die gedoppelte Summe $= 2186$ und folglich die Summe 1093.

513.

In eben dieser Progression sey die Anzahl der Glieder $= n$ und die Summe $= s$, also daß $s = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots 3^{n-1}$ dieses mit 3 multiplicirt giebt $3s = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots 3^n$. Hievon subtrahire man das obige, und weil sich alle Glieder der untern Reihe, außer dem letzten, gegen alle Glieder der obern, außer dem ersten, aufheben, so bekommt man $2s = 3^n - 1$ und also $s = \frac{3^n - 1}{2}$.

Also wird die Summe gefunden, wann man das letzte Glied mit 3 multiplicirt, vom Product 1 subtrahirt und den Rest durch 2 theilt wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$1 = 1, \quad 1 + 3 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2} = 4, \quad 1 + 3 + 9 = \frac{3 \cdot 9 - 1}{2} = 13,$$

$$1 + 3 + 9 + 27 = \frac{3 \cdot 27 - 1}{2} = 40, \quad 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = \frac{3 \cdot 81 - 1}{2} = 121.$$

514.

Nun sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $= a$, der Nenner $= b$, die Anzahl der Glieder $= n$ und die Summe derselben $= s$, also daß

$$s = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \cdots ab^{n-1}.$$

Dieses werde multiplicirt mit b so bekommt man

$$bs = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \cdots ab^n.$$

Hiervon subtrahire man das obige so erhält man $(b - 1) \cdot s = ab^n - a$. Daher bekommt man die gesuchte Summe $s = \frac{ab^n - a}{b - 1}$. Dahero wird die Summe einer jeglichen Geometrischen Progression gefunden wann man das letzte Glied mit dem Nenner der Progression multiplicirt, von dem Product das erste Glied subtrahirt und den Rest durch den Nenner weniger 1 dividirt.

515.

Man habe eine Geometrische Progression von 7 Gliedern; das erste $= 3$ und der Nenner $= 2$, so ist $a = 3$, $b = 2$ und $n = 7$ folglich das letzte Glied $3 \cdot 2^6$ das ist $3 \cdot 64 = 192$, und die Progression selbst

$$3,\quad 6,\quad 12,\quad 24,\quad 48,\quad 96,\quad 192$$

und also das letzte Glied 192 mit dem Nenner 2 multiplicirt giebt 384, davon das erste Glied 3 subtrahirt bleibt 381, dieser Rest durch $b - 1$, das ist durch 1 dividirt, giebt 381, welches die Summe der Progression ist.

516.

Es sey ferner gegeben eine Geometrische Progression von sechs Gliedern, davon das erste 4 und der Nenner $\frac{3}{2}$. Also daß die Progression ist

$$4,\quad 6,\quad 9,\quad \frac{27}{2},\quad \frac{81}{4},\quad \frac{243}{8}$$

dieses letzte Glied $\frac{243}{8}$ mit dem Nenner $\frac{3}{2}$ multiplicirt giebt $\frac{729}{16}$, davon das erste Glied 4 subtrahirt giebt $\frac{665}{16}$, endlich dieser Rest dividirt durch $b - 1 = \frac{1}{2}$ giebt $\frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$.

517.

Wann der Nenner kleiner ist als 1 und also die Glieder der Progression immer abnehmen, so kann die Summe einer solchen Progression die ohne Ende fortläuft angegeben werden.

Es sey z. E. das erste Glied $= 1$ der Nenner $= \frac{1}{2}$ und die Summ $= s$ also daß

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \text{ etc.}$$

ohne Ende. Man multiplicire mit 2 so bekommt man:

$$2s = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \text{ etc.}$$

ohne Ende, hiervon ziehe man das obige ab, so bleibt $s = 2$ welches die Summe der unendlichen Progression ist.

518.

Es sey ferner das erste Glied $= 1$, der Nenner $\frac{1}{3}$ und die Summ $= s$ also daß

$$s = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \text{ etc. ohne Ende.}$$

Man multiplicire alles mit 3 so hat man

$$3s = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \text{ etc. ohne Ende.}$$

Hievon nehme man die obige Reihe weg so bleibt $2s = 3$ folglich ist die Summe $= 1\frac{1}{2}$.

519.

Es sey ferner das erste Glied $= 2$, der Nenner $= \frac{3}{4}$, die Summe $= s$ also daß $s = 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ etc. ohne Ende. Dieses multiplicire man mit $\frac{4}{3}$ so hat man $\frac{4}{3}s = \frac{8}{3} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ etc. ohne Ende. Hiervon das obige subtrahirt bleibt $\frac{1}{3}s = \frac{8}{3}$, also die Summe selbsten wird seyn just 8.

520.

Wann überhaupt das erste Glied gesetzt wird $= a$ und der Nenner der Progression $= \frac{b}{c}$, so daß dieser Bruch kleiner ist als 1 und folglich b kleiner ist als c, so kann die Summe dieser unendlichen Progression folgender Gestalt gefunden werden. Man setzt

$$s = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

ohne Ende. Hier multiplicirt man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man

$$\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

ohne End. Dieses subtrahirt man von dem obigen so bleibt $\left(1 - \frac{b}{c}\right)s = a$ folglich ist

$$s = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}.$$

Multiplicirt man nun oben und unten mit c, so bekommt man $s = \frac{ac}{c - b}$ dahero ist die Summe dieser unendlichen Geometrischen Progression

$$= \frac{a}{1 - \frac{b}{c}} \quad \text{oder} \quad = \frac{ac}{c - b}.$$

Diese Summe wird folglich gefunden wann man das erste Glied a dividirt durch 1 weniger dem Nenner; oder man subtrahirt den Nenner von 1, und durch den Rest dividirt man das erste Glied so bekommt man die Summe.

521.

Wann in solchen Progressionen die Zeichen + und — mit einander abwechseln so kann die Summe auf eben dieselbe Art gefunden werden. Dann es sey

$$s = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

dieses multiplicire man mit $\frac{b}{c}$ so bekommt man:

$$\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

dieses addire man zu dem obigen, da erhält man $\left(1 + \frac{b}{c}\right)s = a$. Hieraus findet man die gesuchte Summe

$$s = \frac{a}{1 + \frac{b}{c}} \quad \text{oder} \quad s = \frac{ac}{c+b}.$$

522.

Es sey z. E. das erste Glied $a = \frac{3}{5}$ und der Nenner der Progression $= \frac{2}{5}$ das ist $b = 2$ und $c = 5$ so wird von dieser Reihe $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$ etc. die Summe also gefunden: der Nenner von 1 subtrahirt bleibt $\frac{3}{5}$, dadurch muß man das erste Glied $\frac{3}{5}$ dividiren, so bekommt man die Summe $= 1$.

Wann aber die Zeichen + und — abwechseln und diese Reihe vorgelegt ist:

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} \text{ etc.}$$

so wird die Summe seyn

$$\frac{a}{1 + \frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}.$$

523.

Zur Uebung soll diese unendliche Progression vorgelegt seyn

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} \text{ etc.}$$

Hier ist das erste Glied $\frac{3}{10}$ und der Nenner $\frac{1}{10}$. Dieser von 1 subtrahirt bleibt $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied dividirt giebt die Summe $= \frac{1}{3}$.

Nimmt man nur ein Glied $\frac{3}{10}$, so fehlt noch $\frac{1}{30}$. Nimmt man zwey Glieder $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$ so fehlt noch $\frac{1}{300}$ zu $\frac{1}{3}$ etc.

524.

Wann diese unendliche Reihe gegeben ist:

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} \text{ etc.}$$

so ist das erste Glied 9, der Nenner $\frac{1}{10}$. Also 1 weniger den Nenner ist $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied 9 dividirt, so wird die Summe $= 10$. Hier ist zu mercken, daß diese Reihe durch einen Decimal-Bruch also vorgestellet wird 9,9999999 etc.

CAPITEL 12

VON DEN UNENDLICHEN DECIMAL-BRÜCHEN

525.

Wir haben oben gesehen, daß bey den Logarithmischen Rechnungen anstatt der gemeinen Brüche Decimal-Brüche gebraucht werden; welches auch bey den andern Rechnungen mit großem Vortheil geschehen kann. Es kommt also darauf an zu zeigen, wie ein gemeiner Bruch in einen Decimal-Bruch verwandelt werde, und wie man den Wert eines Decimal-Bruchs hinwiederum durch einen gemeinen Bruch ausdrücken soll.

526.

Es sey auf eine allgemeine Art der gegebene Bruch $\frac{a}{b}$, welcher in einen Decimal-Bruch verwandelt werden soll. Da nun dieser Bruch den Quotus ausdrückt, welcher entspringt wann man den Zehler a durch den Nenner b dividirt, so schreibe man anstatt a diese Form $a{,}0000000$, welche offenbahr nichts anders anzeigt als die Zahl a, weil keine 10tel, keine 100tel und so fort dabey sind. Diese Form theile man nun durch die Zahl b, nach den gewöhnlichen Regeln der Division, wobey man nur in Acht zu nehmen hat, daß das