CAPITEL 10

VON DEN ZUSAMMENGESETZTEN VERHÄLTNISSEN

488.

Zwey oder mehr Verhältniße werden zusammengesetzt, wann man so wohl die Vorder-Sätze als die Hinter-Sätze besonders mit einander multiplicirt; und alsdann sagt man, daß das Verhältniß zwischen diesen beyden Producten zusammengesetzt sey aus den zwey oder mehr gegebenen Verhältnißen.

Also aus diesen Verhältnißen $a:b$, $c:d$, $e:f$ entsteht durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß $ace:bdf$.

489.

Da ein Verhältniß einerley bleibt, wann man seine beyde Glieder durch einerley Zahl dividirt oder abkürtzt, so kann man die obige Zusammensetzung ungemein erleichtern, wann man die Vorder-Sätze gegen die Hinter-Sätze aufhebt oder abkürtzt, wie schon im vorigen Capitel geschehen.

Also aus folgenden gegebenen Verhältnißen wird das daraus zusammengesetzte solcher Gestalt gefunden. Die gegebenen Verhältniße sind:

$$12:25,\quad 28:33,\quad \text{und}\quad 55:56$$

$$\begin{array}{l}
\cancel{12}.\cancel{4}.2 : 5.\cancel{25} \\
\cancel{28} \quad\; : \cancel{3}.\cancel{33} \\
\underline{\cancel{55}.\cancel{5} \quad : \cancel{2}.\cancel{56}} \\
\qquad 2:5
\end{array}$$

Also erhält man durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß $2:5$.

490.

Eben dieses geht auch auf eine allgemeine Art bey den Buchstaben an; und ist insonderheit dieser Fall merckwürdig, wo immer ein Vorder-Satz dem vorigen Hinter-Satz gleich ist. Also wann die gegebenen Verhältnißen sind:

$$\begin{array}{c}
a:b \\
b:c \\
c:d \\
d:e \\
\underline{e:a}
\end{array}$$

so ist das zusammengesetzte Verhältniß wie $1:1$.

491.

Um den Nutzen dieser Lehre zu zeigen, so bemercke man, daß zwey viereckigte Felder unter sich ein solches Verhältniß haben, welches zusammengesetzt ist aus den Verhältnißen ihrer Längen und ihrer Breiten.

Es seyen z. E. zwey solche Felder A und B. Von jenem sey die Länge 500 Fuß, die Breite aber 60 Fuß. Von diesem sey die Länge 360 Fuß und die Breite 100 Fuß; so ist das Verhältniß der Länge wie 500 : 360 und der Breite wie 60 : 100. Also stehet es

$$\begin{array}{c} \cancel{500}.5 : 6.\cancel{360} \\ \underline{\cancel{60} \;:\; \cancel{100}} \\ 5 : 6 \end{array}$$

Allso verhält sich das Feld A zu dem Feld B wie 5 zu 6.

492.

Ein anderes Exempel. Das Feld A sey 720 Fuß lang und 88 Fuß breit; das Feld B aber sey 660 Fuß lang und 90 Fuß breit, so muß man folgende zwey Verhältniße zusammensetzen

$$\begin{array}{lc} \text{Verhältniß der Längen} & \cancel{720}.8 \;:\; 15.\cancel{60}.\cancel{660} \\ \text{Verhältniß der Breiten} & \underline{\cancel{88}.\cancel{8}.2 : \quad \cancel{90}} \\ & 16 : 15 \end{array}$$

Und dieses ist das Verhältniß der Felder A und B.

493.

Um ferner den Raum oder Inhalt zweyer Zimmer gegen einander zu vergleichen, so ist zu wißen daß ihr Verhältniß aus dreyen zusammengesetzt ist. Nemlich aus dem Verhältniß der Länge, der Breite und der Höhe. Es sey z. E. ein Zimmer A, deßen Länge = 36 Fuß, die Breite = 16 Fuß und die Höhe = 14 Fuß. Von einem andern Zimmer B aber sey die Länge = 42 Fuß, die Breite = 24 Fuß und die Höhe = 10 Fuß, so sind die drey Verhältniße:

$$\begin{array}{lc} \text{der Länge} & \cancel{36}.\cancel{6}.\cancel{3} : \cancel{42}.\cancel{6} \\ \text{der Breite} & \cancel{16}.2 \;:\; \cancel{24}.\cancel{3} \\ \text{der Höhe} & \underline{\cancel{14}.2 \;:\; \cancel{10}.5} \\ & 4 : 5 \end{array}$$

Allso ist der Inhalt des Zimmers A zu dem Inhalt des Zimmers B wie 4 zu 5.

494.

Wann die Verhältniße, welche man solcher Gestalt zusammensetzt, einander gleich sind, so entstehen daher vervielfältigte Verhältniße. Nemlich aus zwey gleichen entsteht ein verdoppeltes oder quadratisches Verhältniß; aus drey gleichen ein dreyfältiges oder cubisches, und so fort. Also aus den Verhältnißen $a:b$ und $a:b$ ist das zusammengesetzte Verhältniß $aa:bb$ dahero sagt man die Quadraten stehen in einer gedoppelten Verhältniß ihrer Wurzel. Und aus dem Verhältniß $a:b$ dreymal gesetzt, entsteht das Verhältniß $a^3:b^3$, dahero sagt man daß die Cubi ein dreyfältiges Verhältniß ihrer Wurzel haben.

495.

In der Geometrie wird gezeigt, daß sich zwey Circkelrunde Plätze in den gedoppelten Verhältnißen ihrer Durchmeßer verhalten, das will so viel sagen, daß sie sich verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmeßer.

Es sey ein solcher Platz A deßen Durchmeßer $=45$ Fuß, eines andern Circkelrunden Platzes B aber Durchmeßer sey $=30$ Fuß, so wird sich jener Platz zu diesem verhalten wie $45\cdot 45$ zu $30\cdot 30$, oder ihr Verhältniß ist aus diesen zwey gleichen Verhältnißen zusammengesetzt

$$\begin{array}{c} \cancel{45}.\cancel{9}.3 : \cancel{30}.\cancel{6}.2 \\ \underline{\cancel{45}.\cancel{9}.3 : \cancel{30}.\cancel{6}.2} \\ 9:4 \end{array}$$

Folglich verhalten sich diese Plätze wie 9 zu 4.

496.

Ferner wird auch bewiesen, daß sich die Inhalte runder Kugeln, wie die Cubi ihrer Durchmeßer verhalten. Wann also der Durchmeßer einer Kugel A ein Fuß ist, und einer andern Kugel B zwey Fuß ist, so wird der Inhalt der Kugel A sich zum Inhalt der Kugel B verhalten wie $1^3:2^3$ oder wie $1:8$.

Wann also diese Kugeln aus einerley Materie bestehen, so wird die Kugel B achtmahl schwerer seyn als die Kugel A.

497.

Hieraus kann man das Gewicht der Kanonen-Kugeln aus ihren Durchmeßern finden, wann man nur von einer das Gewicht hat. Es sey zum Exempel eine

Kugel A, deren Durchmeßer $= 2$ Zoll, und die fünf ℔ schwer ist, man fragt nach dem Gewicht einer andern Kugel B, deren Durchmeßer $= 8$ Zoll ist. Hier hat man nun diese Proportion $2^3 : 8^3 = 5 : \ldots$ Giebt 320 ℔, und dieses ist das Gewicht der Kugel B. Von einer andern Kugel C aber, deren Durchmeßer $= 15$ Zoll wird das Gewicht gefunden

$$2^3 : 15^3 = 5 : \cdots \quad \text{Antwort } 2109\tfrac{3}{8} \text{ ℔}.$$

498.

Sucht man das Verhältniß zweyer Brüche, als $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ so kann dasselbe immer durch gantze Zahlen ausgedrückt werden: dann man darf nur beyde Brüche mit bd multipliciren, so kommt dieses Verhältniß $ad : bc$ heraus welches jenem gleich ist, dahero diese Proportion entsteht $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$. Läßt sich nun ad gegen bc noch abkürtzen, so wird das Verhältniß noch leichter. Also $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = 15 \cdot 36 : 24 \cdot 25 = 9 : 10$.

499.

Es wird ferner gefragt wie sich diese Brüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ gegen einander verhalten, da ist dann so gleich klar daß seyn werde $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$, welches also mit Worten ausgesprochen wird: Daß sich zwey Brüche deren Zehler 1 sind unter sich verhalten umgekehrt wie ihre Nenner. Dieses gilt auch von zweyen Brüchen, welche gleiche Zehler haben. Dann da $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$, so sind sie gleichfalls umgekehrt wie ihre Nenner. Haben aber zwey Brüche gleiche Nenner, als $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, so verhalten sie sich wie die Zehler nemlich wie $a : b$. Also ist $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = \frac{6}{16} : \frac{3}{16} = 6 : 3 = 2 : 1$ und $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$ oder $2 : 3$.

500.

Bey dem freyen Fall der Cörper hat man bemercket, daß in einer Secunde ein Cörper 15 Fuß tief herab falle, in zwey Secunden aber falle er durch eine Höhe von 60 Fuß, und in drey Secunden 135 Fuß, daraus hat man nun geschlossen, daß sich die Höhen verhalten wie die Quadraten der Zeiten; und also auch rückwerts die Zeiten wie die Quadrat-Wurzeln aus den Höhen.

Fragt man nun wie viel Zeit ein Stein brauche um aus einer Höhe von 2160 Fuß herunter zu fallen, so ist $15 : 2160 = 1 :$ Quadrat der gesuchten Zeit.

Also ist das Quadrat der gesuchten Zeit 144, die Zeit aber selbst 12 Secunden.

501.

Man fragt, wie tief ein Stein in einer Stunde herunter fallen könne, das ist in 3600 Secunden?

Man sagt also: wie die Quadraten der Zeiten, das ist wie $1^2 : 3600^2$ also verhält sich die gegebene Höhe = 15 Fuß zu der gesuchten Höhe.

$$
\begin{array}{r}
1 : 12960000 = 15 \text{ zu} \cdots \\
15 \\
\hline
64800000 \\
1296 \\
\hline
194400000
\end{array}
\qquad \text{Antwort } 194400000 \text{ Fuß.}
$$

Rechnen wir nun 24000 Fuß auf eine teutsche Meile, so wird diese Höhe seyn 8100 Meilen, welche Höhe größer ist als die gantze Erde dicke ist.

502.

Eine gleiche Bewandtniß hat es mit dem Preis der Edelgesteine, welche sich nicht nach ihrem Gewicht selbst, sondern nach einem größern Verhältniß richten. Bey den Diamanten gilt diese Regul, daß sich der Preiß wie das Quadrat des Gewichts verhalte, oder das Verhältniß der Preiße ist gleich dem gedoppelten Verhältniße des Gewichts. Dieselben werden nun nach einem Gewicht, welches ein Karath genennt wird, und vier Gran hält, gewogen. Wann nun ein Diamant von einem Karath zwey Rubel gilt, so wird ein Diamant von 100 Karath so viel mal mehr gelten, als das Quadrat von 100 größer ist wie das Quadrat von 1. Also muß die Regeldetri so gesetzt werden

$$1^2 : 100^2 = 2 \text{ Rubel} : \ldots$$

$$\text{oder } 1 : 10000 = 2 \text{ Rbl. zu} \cdots \qquad \text{Antwort } 20000 \text{ Rbl.}$$

In Portugal befindet sich ein Diamant von 1680 Karath deßen Preiß demnach also gefunden wird:

$$1^2 : 1680^2 = 2 \text{ Rubel} : \ldots \text{ oder}$$

$$1 : 2822400 = 2 : \cdots\cdot \qquad \text{Antwort } 5644800 \text{ Rubel.}$$

503.

Von zusammengesetzten Verhältnißen geben die Posten ein merckwürdiges Exempel, weil das Post-Geld nach einem zusammengesetzten Verhältniße der

Zahl der Pferde und der Zahl der Meilen bezahlt werden muß. Wann also für ein Pferd auf eine Meile 8 Gr. oder $\frac{1}{3}$ Rthl. bezahlt wird, und man wißen will wie viel vor 28 Pferde auf $4\frac{1}{2}$ Meile bezahlt werden soll? so setzt man erstlich das Verhältniß der Pferde, das ist

$$\begin{array}{ll} 1:28 & \text{darunter schreibt man das Verhältniß der Meilen} \\ \underline{2:9} & \text{und setzt die zwey Verhältniße zusammen} \\ 2:252 & \text{oder kürtzer } 1:126 = \frac{1}{3}\text{ zu} \cdots \qquad \text{Antwort 42 Rthl.} \end{array}$$

Wann man für 8 Pferde auf 3 Meilen einen Ducaten bezahlt, wie hoch kommen 30 Pferde auf 4 Meilen zu stehen? hier kommt die Rechnung also zu stehen:

$$\begin{array}{c} \cancel{8}.\cancel{2}:\cancel{30}.\cancel{15}.5 \\ \underline{\cancel{3} \;:\; \cancel{4}\qquad} \\ 1:5 = 1 \text{ Ducaten:} \ldots \end{array}$$

Dahero ist die Bezahlung 5 Ducaten.

504.

Bey den Arbeitern kommt diese Zusammensetzung der Verhältniße auch vor, da die Bezahlung nach der zusammengesetzten Verhältniß der Zahl der Arbeiter und der Zahl der Tage geschehen muß.

Wann also zum Exempel einem Mäurer täglich 10 Gr. gegeben wird und man will wißen, wie viel an 24 Mäurer, welche 50 Tage lang gearbeitet haben, bezahlt werden soll? so steht die Rechnung also

$$\begin{array}{rl} & 1:24 \\ & \underline{1:50} \\ & 1:1200 = 10 \text{ Gr.}:500 \text{ Rthl.} \\ & \underline{\quad 10 \quad} \\ 3) & \underline{12000 \text{ Gr.}} \\ 8) & \underline{\quad 4000 \quad} \\ & \quad 500 \text{ Rthl.} \end{array}$$

Weil in dergleichen Exempeln fünf Sätze gegeben sind so wird in den Rechen-Büchern die Art dieselben zu berechnen die Regula Quinque genennt.