331.

Auf solche weise können dergleichen Brüche immer in andre verwandelt werden, wo der Nenner rational ist. Also dieser Bruch $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$, wann man oben und unten mit $5-2\sqrt{6}$ multiplicirt, so wird solcher in diesen verwandelt $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$.

Ferner dieser Bruch $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ wird verwandelt in diesen $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$, ferner $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}$.

332.

Wann in dem Nenner auch mehr Glieder vorkommen, so wird auf eben diese Art nach und nach die Irrationalität aus dem Nenner weggebracht.

Also bey diesem Bruch $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ multiplicirt man erstlich oben und unten mit $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, so hat man $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$; man multipliciret ferner oben und unten mit $5+2\sqrt{6}$, so hat man $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

CAPITEL 9

VON DEN CUBIS UND VON DER AUSZIEHUNG DER CUBIC-WURZEL

333.

Um den Cubus von der Wurzel $a+b$ zu finden, muß man das Quadrat davon, welches ist $aa+2ab+bb$, nochmahls mit $a+b$ multipliciren, da dann der Cubus seyn wird

$$\begin{array}{l} aa+2ab+bb \\ \underline{a+b\qquad\qquad\quad} \\ a^3+2aab+\ \ abb \\ \underline{\qquad+\ \ aab+2abb+b^3} \\ a^3+3aab+3abb+b^3 \end{array}$$

Derselbe besteht also aus den Cubis beyder Theile der Wurzel, hernach noch aus $3aab+3abb$, welches so viel ist als $(3ab)\cdot(a+b)$; und dieses ist das dreyfache Product der beyden Theile mit der Summa derselben multiplicirt.

334.

Wann also die Wurzel aus zwey Theilen besteht, so läßt sich der Cubus nach dieser Regul leicht finden: als z. E. da die Zahl $5 = 3 + 2$, so ist der Cubus davon $= 27 + 8 + 18 \cdot 5$ ist also $= 125$.

Es sey ferner die Wurzel $7 + 3 = 10$, so wird der Cubus seyn

$$343 + 27 + 63 \cdot 10 = 1000.$$

Um den Cubus von 36 zu finden, so setze man die Wurzel $36 = 30 + 6$ und der Cubus wird seyn:

$$27000 + 216 + 540 \cdot 36 = 46656.$$

335.

Wann aber umgekehrt der Cubus gegeben ist, nemlich $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, und man soll davon die Wurzel finden, so ist folgendes zu bemercken.

Erstlich wann der Cubus nach der Potestät eines Buchstaben ordentlich geschrieben wird, so erkennt man aus dem ersten Glied a^3 so gleich das erste Glied der Wurzel a, deßen Cubus jenem gleich ist, und wann man denselben wegnimmt so behält man diesen Rest: $3aab + 3abb + b^3$, aus welchen das zweyte Glied der Wurzel gefunden werden muß.

336.

Da wir nun schon wißen, daß das zweyte Glied $+b$ ist, so kommt es hier nur darauf an, wie daßelbe aus dem obigen Rest gefunden werden könne. Es läßt sich aber derselbe Rest also durch zwey Factores ausdrucken $(3aa + 3ab + bb) \cdot (b)$; wann man also den Rest durch $3aa + 3ab + bb$ dividirt, so erhält man das verlangte zweyte Glied der Wurzel nemlich $+b$.

337.

Weil aber das zweyte Glied noch nicht bekannt ist, so ist auch der Theiler noch unbekannt: Allein es ist genung, daß wir den ersten Theil dieses Theilers haben, welcher ist $3aa$ oder das dreyfache Quadrat des ersten schon gefundenen Theils der Wurzel, und daraus läßt sich schon der andre Theil b finden, woraus hernach der Divisor vollständig gemacht werden muß, ehe man die Division vollendet. Man muß dahero alsdann zu $3aa$ noch hinzufügen $3ab$, das ist das dreyfache Product des ersten Theils mit dem andern, und hernach bb, das ist das Quadrat des andern Theils der Wurzel.

338.

Es sey z. E. gegeben dieser Cubus

$$\begin{array}{r|l}
 & a^3 + 12aa + 48a + 64 \quad (a + 4 \\
 & a^3 \\
\hline
3aa + 12a + 16 & + 12aa + 48a + 64 \\
 & + 12aa + 48a + 64 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Es sey ferner gegeben dieser Cubus

$$\begin{array}{r|l}
 & a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \quad (aa - 2a + 1 \\
 & a^6 \\
\hline
3a^4 - 6a^3 + 4aa & - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 \\
 & - 6a^5 + 12a^4 - 8a^3 \\
\hline
3a^4 - 12a^3 + 12aa + 3aa - 6a + 1 & 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\
 & 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

339.

Hierauf gründet sich auch die gemeine Regul die Cubic-Wurzeln aus Zahlen zu finden. Als mit der Zahl 2197 wird die Rechnung allso angestellet

$$\begin{array}{r|l}
 & 2197 \quad (10 + 3 = 13 \\
 & 1000 \\
\hline
300 & 1197 \\
90 & \\
9 & \\
\hline
399 & 1197 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Es sey ferner gegeben der Cubus 34965783 woraus die Cubic-Wurzel gefunden werden soll.

	34 965 783	(300 + 20 + 7 = 327
	27 000 000	
270000	7 965 783	
18000		
400		
288400	5 768 000	
307200	2 197 783	
6720		
49		
313969	2 197 783	
	0	

CAPITEL 10

VON DEN HÖHERN POTESTÄTEN ZUSAMMENGESETZTER GRÖSSEN

340.

Nach den Quadraten und Cubis folgen die höhern Potestäten, welche durch Exponente wie schon oben gemeldet worden, pflegen angezeigt zu werden: nur muß man die Wurzel wann sie zusammengesetzt ist in Klammern einschließen. Also $(a+b)^5$ deutet die fümfte Potestät von $a+b$ an, und $(a-b)^6$ deutet die sechste Potestät an von $a-b$. Wie aber diese Potestäten entwickelt werden können, soll in diesem Capitel gezeigt werden.

341.

Es sey demnach $a+b$ die Wurzel, oder die erste Potestät, so werden die höhern Potestäten durch die Multiplication folgender Gestalt gefunden.