325.

Wann aber bey der Operation zuletzt etwas übrig bleibt, so ist solches ein Zeichen daß die vorgelegte Zahl kein Quadrat ist und also die Wurzel davon nicht angegeben werden kann. In solchen Fällen bedient man sich des oben gebrauchten Wurzel-Zeichens welches vor die Formel geschrieben, die Formel selbst aber in Klammern eingeschloßen wird. Also wird die Quadrat-Wurzel von $aa + bb$ auf diese Weise angedeutet, $\sqrt{(aa + bb)}$; und $\sqrt{(1 - xx)}$ deutet an die Quadrat-Wurzel aus $1 - xx$. Statt dieses Wurzel-Zeichens kann man auch den gebrochenen Exponenten $\frac{1}{2}$ gebrauchen. Also wird auch durch $(aa + bb)^{\frac{1}{2}}$ die Quadrat-Wurzel aus $aa + bb$ angedeutet.

CAPITEL 8

VON DER RECHNUNG MIT IRRATIONAL-ZAHLEN

326.

Wann zwey oder mehr Irrational-Formeln zusammen addirt werden sollen, so geschieht solches wie oben gelehret worden, indem man alle Glieder mit ihren Zeichen zusammenschreibt. Nur ist bey dem Abkürtzen zu bemercken, daß anstatt $\sqrt{a} + \sqrt{a}$ geschrieben werde $2\sqrt{a}$, und daß $\sqrt{a} - \sqrt{a}$ einander aufhebe oder nichts gebe. Also diese Formeln $3 + \sqrt{2}$ und $1 + \sqrt{2}$ zusammen addirt giebt $4 + 2\sqrt{2}$ oder $4 + \sqrt{8}$; ferner $5 + \sqrt{3}$ und $4 - \sqrt{3}$ zusammen addirt, giebt 9; ferner $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ und $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ zusammen addirt, macht $3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$.

327.

Eben so wenig Schwierigkeit hat die Subtraction indem nur die Zeichen der untern Zahl, welche subtrahirt werden soll, verkehrt gelesen werden müßen, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

$$\begin{array}{l} 4 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{6} \\ \underline{1 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{6}} \\ 3 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{6} \end{array}$$

328.

Bey der Multiplication ist nur zu mercken, daß $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt a giebt. Wann aber ungleiche Zahlen hinter dem $\sqrt{\ }$ Zeichen stehen, so giebt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt $\sqrt{ab}$, woraus folgende Exempel berechnet werden können:

$$\begin{array}{l}
1+\sqrt{2}\\
\underline{1+\sqrt{2}}\\
1+\sqrt{2}\\
\underline{\quad+\sqrt{2}+2}\\
1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
4+2\sqrt{2}\\
\underline{2-\sqrt{2}}\\
8+4\sqrt{2}\\
\underline{\quad-4\sqrt{2}-4}\\
8-4=4
\end{array}$$

329.

Eben dieses gilt auch von den unmöglichen Größen; wobey nur zu mercken daß $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt $-a$ giebt.

Wann man den Cubus von $-1+\sqrt{-3}$ suchen sollte so geschähe solches wann man erstlich das Quadrat nimmt und dasselbe nochmahls mit der Zahl $-1+\sqrt{-3}$ multipliciret wie folgt

$$\begin{array}{l}
-1+\sqrt{-3}\\
\underline{-1+\sqrt{-3}}\\
+1-\sqrt{-3}\\
\underline{\quad-\sqrt{-3}-3}\\
+1-2\sqrt{-3}-3=-2-2\sqrt{-3}\\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \underline{-1+\sqrt{-3}}\\
\qquad\qquad\qquad\quad\ +2+2\sqrt{-3}\\
\qquad\qquad\qquad\quad\ \underline{\quad-2\sqrt{-3}+6}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2+6=8
\end{array}$$

330.

Bey der Division hat man nur nöthig schlechtweg einen Bruch zu setzen und alsdann kann man denselben in eine andere Form verwandeln, so daß der Nenner rational wird. Dann wann der Nenner ist $a+\sqrt{b}$ und man oben und unten mit $a-\sqrt{b}$ multiplicirt, so wird der neue Nenner seyn $aa-b$ und hat also kein Wurzel-Zeichen mehr. Man dividire z. E. $3+2\sqrt{2}$ durch $1+\sqrt{2}$

so hat man $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Jetzt multiplicire man oben und unten mit $1-\sqrt{2}$ so bekommt man

für den Zehler
$$\begin{array}{l} 3+2\sqrt{2} \\ \underline{1-\ \sqrt{2}} \\ 3+2\sqrt{2} \\ \quad -3\sqrt{2}-4 \\ \hline 3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1 \end{array}$$

für den Nenner
$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ \underline{1-\sqrt{2}} \\ 1+\sqrt{2} \\ \quad -\sqrt{2}-2 \\ \hline 1-2=-1 \end{array}$$

Also ist unser neuer Bruch $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$. Man multiplicire ferner oben und unten mit -1 so bekommt man vor den Zehler $+\sqrt{2}+1$ und vor den Nenner $+1$.

Es ist $+\sqrt{2}+1$ aber eben so viel als $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; dann $\sqrt{2}+1$ mit dem Divisor $1+\sqrt{2}$ multiplicirt

$$\begin{array}{l} 1+\ \sqrt{2} \\ \underline{1+\ \sqrt{2}} \\ 1+\ \sqrt{2} \\ \quad +\ \sqrt{2}+2 \\ \hline \text{giebt } 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}. \end{array}$$

Ferner $8-5\sqrt{2}$ durch $3-2\sqrt{2}$ dividirt giebt $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Man multiplicire oben und unten mit $3+2\sqrt{2}$ so bekommt man

für den Zehler
$$\begin{array}{l} 8-\ 5\sqrt{2} \\ \underline{3+\ 2\sqrt{2}} \\ 24-15\sqrt{2} \\ \quad +16\sqrt{2}-20 \\ \hline 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2} \end{array}$$

und für den Nenner
$$\begin{array}{l} 3-2\sqrt{2} \\ \underline{3+2\sqrt{2}} \\ 9-6\sqrt{2} \\ \quad +6\sqrt{2}-4\cdot 2 \\ \hline 9-8=+1 \end{array}$$

Folglich ist der Quotient $4+\sqrt{2}$. Die Probe stehet also:

$$\begin{array}{l} 4+\ \sqrt{2} \\ \underline{3-2\sqrt{2}} \\ 12+3\sqrt{2} \\ \quad -8\sqrt{2}-4 \\ \hline 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2} \end{array}$$

331.

Auf solche weise können dergleichen Brüche immer in andre verwandelt werden, wo der Nenner rational ist. Also dieser Bruch $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$, wann man oben und unten mit $5-2\sqrt{6}$ multiplicirt, so wird solcher in diesen verwandelt $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$.

Ferner dieser Bruch $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ wird verwandelt in diesen $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$, ferner $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}$.

332.

Wann in dem Nenner auch mehr Glieder vorkommen, so wird auf eben diese Art nach und nach die Irrationalität aus dem Nenner weggebracht.

Also bey diesem Bruch $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ multiplicirt man erstlich oben und unten mit $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, so hat man $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$; man multipliciret ferner oben und unten mit $5+2\sqrt{6}$, so hat man $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

CAPITEL 9

VON DEN CUBIS UND VON DER AUSZIEHUNG DER CUBIC-WURZEL

333.

Um den Cubus von der Wurzel $a+b$ zu finden, muß man das Quadrat davon, welches ist $aa+2ab+bb$, nochmahls mit $a+b$ multipliciren, da dann der Cubus seyn wird

$$\begin{array}{l} aa+2ab+bb \\ \underline{a+b\qquad\qquad\quad} \\ a^3+2aab+\ \ abb \\ \underline{\qquad+\ \ aab+2abb+b^3} \\ a^3+3aab+3abb+b^3 \end{array}$$

Derselbe besteht also aus den Cubis beyder Theile der Wurzel, hernach noch aus $3aab+3abb$, welches so viel ist als $(3ab)\cdot(a+b)$; und dieses ist das dreyfache Product der beyden Theile mit der Summa derselben multiplicirt.