welche Reihe der vorigen gleich seyn muß; man subtrahire also die obere von dieser so bekommt man: $0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729}$ etc. welche vier Glieder machen $-\frac{2}{81}$.

305.

Solcher gestalt kann man alle Brüche in unendliche Reihen auflößen, welches nicht nur öfters sehr großen Nutzen schaft, sondern auch an sich selbst höchst merckwürdig ist, daß eine unendliche Reihe, ohngeacht dieselbe niemals aufhört, dennoch einen bestimmten Werth haben könne. Es sind auch die wichtigsten Erfindungen aus diesem Grunde hergeleitet worden, dahero diese Materie allerdings verdient mit der größten Aufmercksamkeit in Erwegung gezogen zu werden.[1])

## CAPITEL 6

## VON DEN QUADRATEN DER ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

306.

Wann das Quadrat von einer zusammengesetzten Größe gefunden werden soll, so darf man dieselbe nur mit sich selbsten multipliciren, und das Product wird das Quadrat davon seyn.

Also wird das Quadrat von $a+b$ gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{r} a+b \phantom{+bb} \\ a+b \phantom{+bb} \\ \hline aa+ab \phantom{+bb} \\ +ab+bb \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

307.

Wann dahero die Wurzel aus zwey Theilen besteht, die zusammen addirt sind, als $a+b$, so besteht das Quadrat I. aus den Quadraten eines jeden Theils nemlich $aa$ und $bb$, II. kommt aber noch hinzu das doppelte Product der beyden Theile nemlich $2ab$, und die gantze Summa $aa+2ab+bb$ ist das Quadrat von $a+b$.

Es sey z. E. $a=10$ und $b=3$, also daß das Quadrat von 13 gefunden werden soll; solches wird demnach seyn $=100+60+9=169$.

1) Siehe zu den Entwickelungen dieses ganzen Kapitels die Anmerkung p. 108. H. W.

308.

Durch Hülfe dieser Formel laßen sich nun leicht die Quadraten von ziemlich großen Zahlen finden, wann dieselben in zwey Theile zergliedert werden.

Also um das Quadrat von 57 zu finden so zertheile man diese Zahl in $50 + 7$; daher das Quadrat seyn wird:

$$2500 + 700 + 49 = 3249.$$

309.

Hieraus sieht man, daß das Quadrat von $a + 1$ seyn werde $aa + 2a + 1$; da nun das Quadrat von $a$ ist $aa$, so wird das Quadrat von $a + 1$ gefunden wann man zu jenem addirt $2a + 1$, wobey zu mercken daß $2a + 1$ die Summa der beyden Wurzeln $a$ und $a + 1$ ist; da also das Quadrat von 10 ist 100 so wird das Quadrat von 11 seyn $= 100 + 21$, und da das Quadrat von 57 ist 3249, so wird das Quadrat von 58 seyn $= 3249 + 115 = 3364$. Und ferner das Quadrat von $59 = 3364 + 117 = 3481$. Noch ferner das Quadrat von $60 = 3481 + 119 = 3600$ etc.

310.

Das Quadrat einer zusammengesetzten Größe, als $a + b$, wird also angedeutet $(a + b)^2$; dahero haben wir $(a + b)^2 = aa + 2ab + bb$, woraus folgende Gleichungen hergeleitet werden:

$$(a + 1)^2 = aa + 2a + 1, \quad (a + 2)^2 = aa + 4a + 4,$$
$$(a + 3)^2 = aa + 6a + 9, \quad (a + 4)^2 = aa + 8a + 16,$$

und so ferner.

311.

Wann die Wurzel ist $a - b$ so wird ihr Quadrat seyn $= aa - 2ab + bb$, welches dahero aus den Quadraten beyder Theile besteht, wovon aber das doppelte Product muß weggenommen werden.

Es sey z. E. $a = 10$ und $b = 1$ so wird das Quadrat von 9 seyn $= 100 - 20 + 1 = 81$.

312.

Da wir nun diese Gleichung haben $(a - b)^2 = aa - 2ab + bb$, so wird seyn $(a - 1)^2 = aa - 2a + 1$; das Quadrat von $a - 1$ wird also gefunden, wann man von $aa$ subtrahirt $2a - 1$, welches die Summa der beyden Wurzeln $a$ und $a - 1$ ist.

Es sey z. E. $a = 50$ so ist $aa = 2500$ und $a - 1 = 49$, dahero

$$49^2 = 2500 - 99 = 2401.$$

313.

Dieses läßt sich auch durch Brüche erläutern, dann wann man vor die Wurzel nimmt $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$ (welches 1 ausmacht) so wird das Quadrat seyn:

$$\frac{9}{25} + \frac{4}{25} + \frac{12}{25} = \frac{25}{25} \text{ das ist } 1.$$

Ferner das Quadrat von $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ (welches $\frac{1}{6}$ ist) wird seyn $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$.

314.

Wann die Wurzel aus mehr Gliedern besteht, so läßt sich das Quadrat auf gleiche Art bestimmen: Also von $a + b + c$ wird das Quadrat gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{llllll}
a + b + c & & & & & \\
a + b + c & & & & & \\
\hline
aa + ab + ac & & & + bc & & \\
\quad + ab + ac & & + bb & + bc & + cc & \\
\hline
aa + 2ab + 2ac & & + bb & + 2bc & + cc &
\end{array}$$

woraus man sieht, daß dasselbe erstlich aus dem Quadrat eines jeden Theils der Wurzel und hernach aus dem doppelten Product von je zwey Theilen mit einander besteht.

315.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern so wollen wir die Zahl 256 in diese drey Theile zertheilen $200 + 50 + 6$; dahero das Quadrat davon aus folgenden Theilen zusammengesetzt seyn wird:

$$\begin{array}{rr}
40000 & 256 \\
2500 & 256 \\
\cline{2-2}
36 & 1536 \\
20000 & 1280\phantom{0} \\
2400 & 512\phantom{00} \\
\cline{2-2}
600 & 65536 \\
\cline{1-1}
65536 &
\end{array}$$

und dieses ist dem $256 \cdot 256$ offenbahr gleich.

316.

Wann einige Glieder in der Wurzel negativ sind, so wird das Quadrat nach eben dieser Regul gefunden, wann man nur bey den doppelten Producten Achtung giebt was für ein Zeichen einem jeden zukommt. Also von $a - b - c$ wird das Quadrat seyn: $aa + bb + cc - 2ab - 2ac + 2bc$. Wann also die Zahl 256 also vorgestellet wird $300 - 40 - 4$, so bekömmt man:

| Positive Theile | Negative Theile |
|---|---|
| $+ 90000$ | $- 24000$ |
| $1600$ | $2400$ |
| $320$ | $- 26400$ |
| $16$ | |
| $+ 91936$ | |
| $- 26400$ | |
| $65536$. Quadrat von 256, wie oben. | |

## CAPITEL 7

## VON DER AUSZIEHUNG DER QUADRAT-WURZEL IN ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

317.

Um hiervon eine sichere Regul zu geben, so müßen wir das Quadrat von der Wurzel $a + b$, welches ist $aa + 2ab + bb$ genau in Erwegung ziehen, und suchen wie man hinwiederum aus dem gegebenen Quadrat die Wurzel herausbringen könne. Worüber folgende Betrachtungen anzustellen sind.

318.

Erstlich da das Quadrat $aa + 2ab + bb$ aus mehrern Gliedern besteht, so ist gewiß, daß auch die Wurzel aus mehr als einem Gliede bestehen müße; und wann das Quadrat so geschrieben wird, daß die Potestäten von einem Buchstaben, als $a$, immer abnehmen, so ist klar daß das erste Glied das Quadrat seyn werde von dem ersten Glied der Wurzel. Da nun in unserm Fall das erste Glied des Quadrats $aa$ ist, so ist offenbahr, daß das erste Glied der Wurzel seyn müße $a$.