CAPITEL 5

VON DER AUFLÖSSUNG DER BRÜCHE IN UNENDLICHEN REIHEN

289.

Wann sich das Dividend durch den Divisor nicht theilen läßt, so wird der Quotient, wie schon oben gezeigt, durch einen Bruch ausgedrückt.

Also wann 1 durch $1-a$ getheilt werden soll, so bekommt man diesen Bruch $\frac{1}{1-a}$. Inzwischen kann doch die Division nach den vorhergehenden Reguln angestellt und so weit man will fortgesetzt werden, da dann immer der wahre Quotus, ob gleich in verschiedenen Formen, herauskommen muß

290.

Um dieses zu zeigen so laßt uns das Dividend 1 würcklich durch den Divisor $1-a$ theilen wie folget:

$$\begin{array}{lll} 1-a) & 1 & \left(1+\frac{a}{1-a}\right. \\ & \underline{+1-a} & \\ & \text{Rest } +a & \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{lll} 1-a) & 1 & \left(1+a+\frac{aa}{1-a}\right. \\ & \underline{+1-a} & \\ & +a & \\ & \underline{+a-aa} & \\ & \text{Rest } +aa & \end{array}$$

Um noch mehr Formen zu finden, so theile man aa durch $1-a$ als

$$\begin{array}{lll} 1-a) & aa & \left(aa+\frac{a^3}{1-a}\right. \\ & \underline{aa-a^3} & \\ & +a^3 & \end{array} \qquad \text{ferner} \qquad \begin{array}{lll} 1-a) & a^3 & \left(a^3+\frac{a^4}{1-a}\right. \\ & \underline{a^3-a^4} & \\ & +a^4 & \end{array}$$

$$\text{ferner} \qquad \begin{array}{lll} 1-a) & a^4 & \left(a^4+\frac{a^5}{1-a}\right. \\ & \underline{a^4-a^5} & \\ & +a^5 \text{ etc.} & \end{array}$$

291.

Hieraus ersehen wir, daß der Bruch $\frac{1}{1-a}$ durch alle folgende Formen ausgedruckt werden kann

$$\text{I.)}\ 1+\frac{a}{1-a},\qquad \text{II.)}\ 1+a+\frac{aa}{1-a},\qquad \text{III.)}\ 1+a+aa+\frac{a^3}{1-a},$$

$$\text{IV.)}\ 1+a+aa+a^3+\frac{a^4}{1-a},\qquad \text{V.)}\ 1+a+aa+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}\ \text{etc.}$$

Man betrachte die erste Form $1+\frac{a}{1-a}$. Nun ist 1, so viel als $\frac{1-a}{1-a}$: folglich $1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}$.

Für die zweyte Form $1+a+\frac{aa}{1-a}$ bringe man den gantzen Theil $1+a$ auch zum Nenner $1-a$, so bekommt man $\frac{1-aa}{1-a}$, darzu $\frac{+aa}{1-a}$ giebt $\frac{1-aa+aa}{1-a}$, das ist $\frac{1}{1-a}$. Für die dritte Form $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, giebt der gantze Theil zum Nenner $1-a$ gebracht $\frac{1-a^3}{1-a}$, darzu der Bruch $\frac{a^3}{1-a}$ macht $\frac{1}{1-a}$; woraus erhellet, daß alle diese Formen in der That so viel sind als der vorgegebene Bruch $\frac{1}{1-a}$.

292.

Man kann daher solcher Gestalt so weit fortgehen als man will, ohne daß man weiter nöthig habe zu rechnen. Also wird seyn

$$\frac{1}{1-a}=1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+\frac{a^8}{1-a}.$$

Man kann auch so gar immer weiter fortgehen, ohne jemals aufzuhören, und dadurch wird der vorgelegte Bruch $\frac{1}{1-a}$ in eine unendliche Reihe aufgelößt, welche ist:

$$1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+a^8+a^9+a^{10}+a^{11}+a^{12}\ \text{etc.}$$

ins unendliche. Und von dieser unendlichen Reihe kann man mit recht behaupten, daß ihr Werth eben so viel sey, als der Bruch $\frac{1}{1-a}$.

293.

Dieses scheinet anfänglich sehr wunderbar; jedoch wird es durch die Betrachtung einiger Fälle begreiflich werden: Es sey erstlich $a=1$, so wird unsere Reihe $1+1+1+1+1+1+1+1+1$ etc. bis ins unendliche, welche dem Bruch $\frac{1}{1-1}$, das ist $\frac{1}{0}$, gleich seyn soll. Wir haben aber schon oben bemercket, daß $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl sey, und dieses wird hier von neuem auf das schönste bestätiget.

Wann man aber setzt $a = 2$ so wird unsere Reihe

$$= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 \text{ etc.}$$

bis ins unendliche, deren Werth seyn soll $\frac{1}{1-2}$, das ist $\frac{1}{-1} = -1$; welches dem ersten Anblick nach ungereimt scheint.

Es ist aber zu mercken, daß wann man irgendwo in obiger Reihe will stehen bleiben, darzu allezeit noch ein Bruch gesetzt werden muß.

Also wann wir z. E. bey 64 still stehen, so müßen wir zu

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$$

noch diesen Bruch $\frac{128}{1-2}$, das ist $\frac{128}{-1} = -128$ hinzusetzen, woraus entsteht $127 - 128$, das ist -1.

Geht man aber ohne Ende fort, so fällt der Bruch zwar weg, man stehet aber hingegen auch niemals still.[1])

294.

Dieses ist demnach zu beobachten, wann für a größere Zahlen als 1 angenommen werden. Nimmt man aber für a kleinere Zahlen, so läßt sich alles leichter begreifen.

Es sey z. E. $a = \frac{1}{2}$ so bekommt man $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, welches folgender Reihe gleich seyn wird:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} \text{ etc.}$$

ohne Ende. Dann nimmt man nur zwey Glieder so hat man $1 + \frac{1}{2}$, und so fehlt noch $\frac{1}{2}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $1\frac{3}{4}$, fehlt noch $\frac{1}{4}$; nimmt man vier Glieder so hat man $1\frac{7}{8}$, fehlt noch $\frac{1}{8}$: woraus man sieht, daß immer weniger fehlt, folglich wann man unendlich weit fortgeht, so muß gar nichts fehlen.

295.

Man setze $a = \frac{1}{3}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, welchem dahero folgende Reihe gleich ist $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ etc. bis ins unendliche. Nimmt man zwey Glieder so hat man $1\frac{1}{3}$, fehlt noch $\frac{1}{6}$. Nimmt

1) Auf die Frage der Konvergenz nimmt EULER hier und im folgenden keinerlei Rücksicht, wodurch er denn zu solch paradoxen Resultaten kommt. H. W.

man drey Glieder so hat man $1\frac{4}{9}$ fehlt noch $\frac{1}{18}$. Nimmt man vier Glieder so hat man $1\frac{13}{27}$, fehlt noch $\frac{1}{54}$. Da nun der Fehler immer dreymal kleiner wird, so muß derselbe endlich verschwinden.

296.

Laßt uns setzen $a = \frac{2}{3}$ so wird der Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, die Reihe aber wird: $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$ etc. bis ins unendliche. Nimmt man erstlich $1\frac{2}{3}$ so fehlt noch $1\frac{1}{3}$, nimmt man drey Glieder $2\frac{1}{9}$ so fehlt noch $\frac{8}{9}$, nimmt man vier Glieder $2\frac{11}{27}$ so fehlt noch $\frac{16}{27}$.

297.

Es sey $a = \frac{1}{4}$ so wird der Bruch $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}$, die Reihe aber wird $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ etc. Nimmt man zwey Glieder $1\frac{1}{4}$ so fehlt noch $\frac{1}{12}$; nimmt man drey Glieder so hat man $1\frac{5}{16}$ fehlt noch $\frac{1}{48}$ etc.

298.

Auf gleiche Weise kann auch dieser Bruch $\frac{1}{1+a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset werden, wann man den Zehler 1 durch den Nenner $1 + a$ würcklich dividirt, wie folget:

$$\begin{array}{lllllll}
1+a) & 1 & (1 - a + aa - a^3 + a^4 \\
 & \underline{1+a} \\
 & -a \\
 & \underline{-a-aa} \\
 & \quad +aa \\
 & \quad \underline{+aa+a^3} \\
 & \qquad -a^3 \\
 & \qquad \underline{-a^3-a^4} \\
 & \qquad\quad +a^4 \\
 & \qquad\quad \underline{+a^4+a^5} \\
 & \qquad\qquad -a^5 \text{ etc.}
\end{array}$$

Dahero ist unser Bruch $\frac{1}{1+a}$ gleich dieser unendlichen Reihe:

$$1 - a + aa - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 \text{ etc.}$$

299.

Setzt man $a = 1$ so erhält man diese merckwürdige Vergleichung:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \text{ etc.}$$

bis ins unendliche; welches wiedersinnig scheint: dann wann man irgendwo mit -1 aufhört, so giebt diese Reihe 0; hört man irgend aber mit $+1$ auf, so giebt dieselbe 1. Allein eben hieraus läßt sich die Sache begreiffen, weil wann man ohne End fort gehen und weder bey -1 noch $+1$ irgendwo aufhören muß, so kann weder 1 noch 0 herauskommen sondern etwas darzwischen welches $\frac{1}{2}$ ist.[1])

300.

Es sey ferner $a = \frac{1}{2}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, welchem folglich gleich seyn wird diese Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ etc. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder so hat man $\frac{1}{2}$, ist zu wenig um $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{3}{4}$, ist zu viel um $\frac{1}{12}$; nimmt man vier Glieder so hat man $\frac{5}{8}$, ist zu wenig um $\frac{1}{24}$ etc.

301.

Setzt man $a = \frac{1}{3}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, welchem folglich diese Reihe wird gleich seyn $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$ etc. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder so hat man $\frac{2}{3}$, ist zu wenig um $\frac{1}{12}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{7}{9}$, ist zu viel um $\frac{1}{36}$. Nimmt man vier Glieder so hat man $\frac{20}{27}$, ist zu wenig um $\frac{1}{108}$, und so fort.

302.

Man kann den Bruch $\frac{1}{1+a}$ auf noch eine andre Art auflösen, indem man 1 durch $a + 1$ theilt, nemlich:

1) Siehe die Anmerkung p. 108. H. W.

$$
\begin{array}{lllll}
a+1) & 1 & \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}\text{ etc.}\right. & & \\
 & \underline{1+\frac{1}{a}} & & & \\
 & -\frac{1}{a} & & & \\
 & \underline{-\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}} & & & \\
 & & +\frac{1}{aa} & & \\
 & & \underline{+\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}} & & \\
 & & -\frac{1}{a^3} & & \\
 & & \underline{-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}} & & \\
 & & & +\frac{1}{a^4} & \\
 & & & \underline{+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}} & \\
 & & & & -\frac{1}{a^5}\text{ etc.}
\end{array}
$$

Folglich ist unser Bruch $\frac{1}{a+1}$ dieser Reihe gleich

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}\text{ etc. ohne Ende.}$$

Setzt man $a=1$ so bekommt man diese Reihe

$$1-1+1-1+1-1+1\text{ etc.}=\frac{1}{2}\text{ wie oben.}$$

Setzt man $a=2$ so bekommt man diese Reihe

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\text{ etc.}$$

303.

Auf gleiche Weise kann man auf eine allgemeine Art diesen Bruch $\frac{c}{a+b}$ in einer Reihe auflösen,

$$
\begin{array}{l}
a+b)\ c\ \left(\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}\ \text{etc.}\right.\\
\quad c+\frac{bc}{a}\\
\hline
\quad -\frac{bc}{a}\\
\quad -\frac{bc}{a}-\frac{bbc}{aa}\\
\hline
\qquad +\frac{bbc}{aa}\\
\qquad +\frac{bbc}{aa}+\frac{b^3c}{a^3}\\
\hline
\qquad\qquad -\frac{b^3c}{a^3}
\end{array}
$$

Woraus wir diese Vergleichung erhalten

$$\frac{c}{a+b}=\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4} \text{ bis ins unendliche.}$$

Es sey $a=2$, $b=4$, und $c=3$ so haben wir

$$\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2+4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-3+6-12 \text{ etc.}$$

Es sey $a=10$, $b=1$ und $c=11$ so haben wir

$$\frac{c}{a+b}=\frac{11}{10+1}=1=\frac{11}{10}-\frac{11}{100}+\frac{11}{1000}-\frac{11}{10000} \text{ etc.}$$

Nimmt man nur ein Glied, so hat man $\frac{11}{10}$ welches zu viel um $\frac{1}{10}$. Nimmt man zwey Glieder so hat man $\frac{99}{100}$, welches zu wenig um $\frac{1}{100}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{1001}{1000}$, ist zu viel um $\frac{1}{1000}$ etc.

304.

Wann der Divisor aus mehr Theilen besteht, so kann die Division gleicher Gestalt ins unendliche fortgesetzt werden.

Als wann dieser Bruch $\frac{1}{1-a+aa}$ vorgegeben wäre, so wird die unendliche Reihe, so demselben gleich ist also gefunden:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
1-a+aa) & 1 & (1+a-a^3-a^4+a^6+a^7 \text{ etc.} \\
& \underline{1-a+aa} \\
& \quad +a-aa \\
& \quad \underline{+a-aa+a^3} \\
& \qquad\qquad -a^3 \\
& \qquad\qquad \underline{-a^3+a^4-a^5} \\
& \qquad\qquad\qquad -a^4+a^5 \\
& \qquad\qquad\qquad \underline{-a^4+a^5-a^6} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +a^6 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+a^6-a^7+a^8} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +a^7-a^8 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+a^7-a^8+a^9} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -a^9 \text{ etc.}
\end{array}
$$

Dahero haben wir diese Vergleichung

$$\frac{1}{1-a+aa} = 1+a-a^3-a^4+a^6+a^7-a^9-a^{10} \text{ etc.}$$

ohne Ende. Nimmt man hier $a=1$ so bekommt man diese Reihe

$$1 = 1+1-1-1+1+1-1-1+1+1 \text{ etc.}$$

welche Reihe die schon oben gefundene $1-1+1-1+1$ etc. gedoppelt in sich enthält, da nun die obige Reihe dem $\frac{1}{2}$ gleich war, so ist kein Wunder daß diese $\frac{2}{2}$ das ist 1 ausmacht.

Setzt man $a=\frac{1}{2}$ so bekommt man diese Gleichung

$$\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{512} \text{ etc.}$$

Setzt man $a=\frac{1}{3}$ so bekommt man diese Gleichung, als

$$\frac{1}{\frac{7}{9}} \text{ oder } \frac{9}{7} = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\frac{1}{729} \text{ etc.}$$

Nimmt man hier vier Glieder so bekommt man $\frac{104}{81}$ welches kleiner ist als $\frac{9}{7}$ um $\frac{1}{567}$.

Man setze ferner $a=\frac{2}{3}$ so bekommt man diese Gleichung

$$\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1+\frac{2}{3}-\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\frac{64}{729} \text{ etc.}$$

welche Reihe der vorigen gleich seyn muß; man subtrahire also die obere von dieser so bekommt man: $0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729}$ etc. welche vier Glieder machen $-\frac{2}{81}$.

305.

Solcher gestalt kann man alle Brüche in unendliche Reihen auflößen, welches nicht nur öfters sehr großen Nutzen schaft, sondern auch an sich selbst höchst merckwürdig ist, daß eine unendliche Reihe, ohngeacht dieselbe niemals aufhört, dennoch einen bestimmten Werth haben könne. Es sind auch die wichtigsten Erfindungen aus diesem Grunde hergeleitet worden, dahero diese Materie allerdings verdient mit der größten Aufmercksamkeit in Erwegung gezogen zu werden.[1])

CAPITEL 6

VON DEN QUADRATEN DER ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

306.

Wann das Quadrat von einer zusammengesetzten Größe gefunden werden soll, so darf man dieselbe nur mit sich selbsten multipliciren, und das Product wird das Quadrat davon seyn.

Also wird das Quadrat von $a + b$ gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{l} a + b \\ \underline{a + b} \\ aa + ab \\ \underline{\quad\;\; + ab + bb} \\ aa + 2ab + bb \end{array}$$

307.

Wann dahero die Wurzel aus zwey Theilen besteht, die zusammen addirt sind, als $a + b$, so besteht das Quadrat I. aus den Quadraten eines jeden Theils nemlich aa und bb, II. kommt aber noch hinzu das doppelte Product der beyden Theile nemlich $2ab$, und die gantze Summa $aa + 2ab + bb$ ist das Quadrat von $a + b$.

Es sey z. E. $a = 10$ und $b = 3$, also daß das Quadrat von 13 gefunden werden soll; solches wird demnach seyn $= 100 + 60 + 9 = 169$.

1) Siehe zu den Entwickelungen dieses ganzen Kapitels die Anmerkung p. 108. H. W.