267.

Da nun die Subtraction selbst weiter keine Schwierigkeit hat, so ist nur noch übrig zu bemercken, daß wann in dem gefundenen Rest zwey oder mehr Glieder vorkommen, welche in Ansehung der Buchstaben einerley sind, die Abkürtzung nach eben denselben Regeln vorgenommen werden könne, welche oben bey der Addition gegeben worden.

268.

Es soll von $a+b$, wodurch die Summa zweyer Zahlen angedeutet wird, ihre Differenz $a-b$ subtrahirt werden, so bekommt man erstlich $a+b-a+b$; nun aber ist $a-a=0$ und $b+b=2b$, folglich ist der gesuchte Rest $2b$, das ist die kleinere Zahl b doppelt genommen.

269.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch einige Exempel beyfügen:

$aa+ab+bb$	$3a-4b+5c$	$a^3+3aab+3abb+b^3$	$\sqrt{a}+2\sqrt{b}$
$bb-ab+aa$	$2b+4c-6a$	$a^3-3aab+3abb-b^3$	$\sqrt{a}-3\sqrt{b}$
$2ab$	$9a-6b+c$	$6aab+2b^3$	$+5\sqrt{b}$

CAPITEL 3

VON DER MULTIPLICATION MIT ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

270.

Wann eine solche Multiplication nur soll angezeigt werden, so wird eine jede von den Formeln, welche mit einander multipliciret werden sollen in Klammern eingeschloßen, und entweder ohne Zeichen oder mit einem dazwischen gesetzten Punckt an einander gehängt.

Also wann diese beyde Formeln $a-b+c$ und $d-e+f$ mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product solcher Gestalt angezeiget:

$$(a-b+c)\cdot(d-e+f) \quad \text{oder} \quad (a-b+c)(d-e+f).$$

Diese Art wird sehr häuffig gebraucht, weil man daraus so gleich sieht, aus was für Factoren ein solches Product zusammen gesetzt ist.

271.

Um aber zu zeigen wie eine solche Multiplication würcklich angestellt werden müße, so ist erstlich zu mercken, daß wann eine solche Formel $a - b + c$ z. E. mit 2 multiplicirt werden soll, ein jedes Glied derselben besonders mit 2 multiplicirt werden müße, und also herauskomme

$$2a - 2b + 2c.$$

Eben dieses gilt auch von allen andern Zahlen. Wann also dieselbe Formel mit d multiplicirt werden soll so bekommt man:

$$ad - bd + cd.$$

272.

Hier haben wir vorausgesetzt, daß die Zahl d positiv sey; wann aber mit einer Negativ-Zahl als $-e$ multiplicirt werden soll, so ist die oben gegebene Regel zu beobachten, daß nemlich zwey ungleiche Zeichen multiplicirt $-$, zwey gleiche aber $+$ geben. Dahero bekommt man:

$$-ae + be - ce.$$

273.

Um nun zu zeigen wie eine Formel, sie mag einfach oder zusammengesetzt seyn, als A, durch eine zusammengesetzte als $d - e$ multiplicirt werden soll, so wollen wir erstlich pure Zahlen betrachten, und annehmen, daß A mit $7 - 3$ multiplicirt werden soll. Hier ist nun klar, daß man das vierfache von A verlange: nimmt man nun erstlich das siebenfache, so muß man hernach das dreyfache davon subtrahiren. Also auch überhaupt wann man mit $d - e$ multiplicirt, so multiplicirt man die Formel A erstlich mit d und hernach mit e und subtrahirt das letztere Product von dem ersteren, also daß herauskommt $dA - eA$. Laßt uns nun setzen $A = a - b$ welches mit $d - e$ multiplicirt werden soll, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l} dA = ad - bd \\ \underline{eA = ae \quad\; - be \qquad\quad} \\ \qquad\quad ad - bd - ae + be \end{array}$$

welches das verlangte Product ist.

274.

Da wir nun das Product $(a-b)\cdot(d-e)$ gefunden haben, und von der Richtigkeit desselben überzeugt sind, so wollen wir dieses Multiplications-Exempel folgender Gestalt deutlicher vor Augen stellen:

$$\begin{array}{l} a-b \\ \underline{d-e\qquad\qquad\quad} \\ ad-bd-ae+be \end{array}$$

woraus wir sehen, daß ein jedes Glied der obern Formel mit einem jeglichen der untern multiplicirt werden müße, und daß wegen der Zeichen die obengegebene Regul gäntzlich Statt habe, und hierdurch von neuem bestätiget werde, wann etwann jemand noch irgend einen Zweifel darüber gehabt hätte.

275.

Nach dieser Regul wird es also leicht seyn folgendes Exempel auszurechnen: $a+b$ soll multiplicirt werden mit $a-b$:

$$\begin{array}{ll} & a+b \\ & \underline{a-b} \\ & aa+ab \\ & \underline{\quad\;\, -ab-bb} \\ \text{das Product wird seyn} & aa-bb. \end{array}$$

276.

Wann also für a und b nach Belieben bestimmte Zahlen gesetzt werden, so leitet uns dieses Exempel auf folgende Wahrheit: Wann die Summa zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt wird, so ist das Product die Differenz ihrer Quadraten, welches also kann vorgestellt werden:

$$(a+b)(a-b)=aa-bb;$$

folglich ist hinwiederum die Differenz zwischen zwey Quadrat-Zahlen immer ein Product, oder sie läßt sich theilen, so wohl durch die Summe als durch die Differenz der Wurzeln, und ist also keine Prim-Zahl.[1])

1) Vorausgesetzt natürlich, daß $a-b$ nicht gleich 1 sei. H. W.

277.

Laßt uns noch ferner folgende Exempel ausrechnen:

$$\text{I.)}\quad \begin{array}{l} 2a - 3 \\ a + 2 \\ \hline 2aa - 3a \\ \qquad + 4a - 6 \\ \hline 2aa + a - 6 \end{array} \qquad \text{II.)}\quad \begin{array}{l} 4aa - 6a + 9 \\ 2a + 3 \\ \hline 8a^3 - 12aa + 18a \\ \qquad + 12aa - 18a + 27 \\ \hline 8a^3 + 27 \end{array} \qquad \text{III.)}\quad \begin{array}{l} 3aa - 2ab - bb \\ 2a - 4b \\ \hline 6a^3 - 4aab - 2abb \\ \qquad - 12aab + 8abb + 4b^3 \\ \hline 6a^3 - 16aab + 6abb + 4b^3 \end{array}$$

$$\text{IV.)}\quad \begin{array}{l} aa + 2ab + 2bb \\ aa - 2ab + 2bb \\ \hline a^4 + 2a^3b + 2aabb \\ \quad - 2a^3b - 4aabb - 4ab^3 \\ \qquad + 2aabb + 4ab^3 + 4b^4 \\ \hline a^4 + 4b^4 \end{array} \qquad \text{V.)}\quad \begin{array}{l} 2aa - 3ab - 4bb \\ 3aa - 2ab + bb \\ \hline 6a^4 - 9a^3b - 12aabb \\ \quad - 4a^3b + 6aabb + 8ab^3 \\ \qquad + 2aabb - 3ab^3 - 4b^4 \\ \hline 6a^4 - 13a^3b - 4aabb + 5ab^3 - 4b^4 \end{array}$$

$$\text{VI.)}\quad \begin{array}{l} aa + bb + cc - ab - ac - bc \\ a + b + c \\ \hline a^3 + abb + acc - aab - aac - abc \\ \quad - abb \qquad + aab \qquad - abc + b^3 + bcc - bbc \\ \qquad - acc \qquad + aac - abc \qquad - bcc + bbc + c^3 \\ \hline a^3 - 3abc + b^3 + c^3 \end{array}$$

278.

Wann mehr als zwey Formeln mit einander multiplicirt werden sollen, so begreift man leicht daß nachdem man zwey davon mit einander multiplicirt, das Product nach und nach auch durch die übrigen multiplicirt werden müße, und daß es gleich viel sey, was man für eine Ordnung darin beobachtet. Es soll z. E. folgendes Product, so aus vier Factores besteht, gefunden werden:

$$\begin{array}{cccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\ (a + b) & (aa + ab + bb) & (a - b) & (aa - ab + bb) \end{array}$$

so multiplicirt man erstlich den I. und II. Factor:

$$\begin{array}{rl} \text{II.} & aa + ab + bb \\ \text{I.} & a + b \\ \hline & a^3 + aab \;\; + abb \\ & \quad\;\; + aab \;\; + abb \;\; + b^3 \\ \hline \text{I. II.} & a^3 + 2aab + 2abb + b^3 \end{array}$$

Hernach multiplicirt man den III. und IV. Factor:

$$\begin{array}{rl} \text{IV.} & aa - ab + bb \\ \text{III.} & a - b \\ \hline & a^3 - aab \;\; + abb \\ & \quad\;\; - aab \;\; + abb \;\; - b^3 \\ \hline \text{III. IV.} & a^3 - 2aab + 2abb - b^3 \end{array}$$

Nun ist also noch übrig jenes Product I. II. mit diesem III. IV. zu multipliciren,

$$\begin{array}{rlllllll} \text{I. II.} & = a^3 & + 2aab & + 2abb & + b^3 \\ \text{III. IV.} & = a^3 & - 2aab & + 2abb & - b^3 \\ \hline & a^6 & + 2a^5b & + 2a^4bb & + a^3b^3 \\ & & - 2a^5b & - 4a^4bb & - 4a^3b^3 & - 2aab^4 \\ & & & + 2a^4bb & + 4a^3b^3 & + 4aab^4 & + 2ab^5 \\ & & & & - a^3b^3 & - 2aab^4 & - 2ab^5 & - b^6 \\ \hline & a^6 - b^6 \end{array}$$

dieses ist nun das gesuchte Product.

279.

Laßt uns nun bey eben diesem Exempel die Ordnung verändern und erstlich die I. Formel mit der III. und so dann die II. mit der IV. multipliciren

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & a + b \\ \text{III.} & a - b \\ \hline & aa + ab \\ & \quad\;\; - ab - bb \\ \hline \text{I. III.} & = aa - bb \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{II.} & aa + ab + bb \\ \text{IV.} & aa - ab + bb \\ \hline & a^4 + a^3b + aabb \\ & \quad\;\; - a^3b - aabb - ab^3 \\ & \qquad\qquad + aabb + ab^3 + b^4 \\ \hline \text{II. IV.} & = a^4 + aabb + b^4 \end{array}$$

Nun ist noch übrig das Product II. IV. mit dem I. III. zu multipliciren:

$$\begin{array}{lll}
\text{II. IV.} & = a^4 + aabb + b^4 & \\
\text{I. III.} & = aa - bb & \\
\hline
 & a^6 + a^4bb + aab^4 & \\
 & \quad - a^4bb - aab^4 - b^6 & \\
\hline
 & a^6 - b^6 &
\end{array}$$

welches das gesuchte Product ist.

280.

Wir wollen die Rechnung noch nach einer andern Ordnung anstellen und erstlich die I. Formel mit der IV. und hernach die II. mit der III. multipliciren:

$$\begin{array}{ll}
\text{IV.}\ aa - ab + bb & \qquad \text{II.}\ aa + ab + bb \\
\text{I.}\ \ a + b & \qquad \text{III.}\ \ a - b \\
\hline
a^3 - aab + abb & \qquad a^3 + aab + abb \\
\quad + aab - abb + b^3 & \qquad \quad - aab - abb - b^3 \\
\hline
\text{I. IV.} = a^3 + b^3 & \qquad \text{II. III.} = a^3 - b^3
\end{array}$$

Nun ist noch übrig das Product I. IV. mit II. III. zu multipliciren

$$\begin{array}{ll}
\text{I. IV.} & = a^3 + b^3 \\
\text{II. III.} & = a^3 - b^3 \\
\hline
 & a^6 + a^3b^3 \\
 & \quad - a^3b^3 - b^6 \\
\hline
 & a^6 - b^6
\end{array}$$

281.

Es ist der Mühe werth dieses Exempel mit Zahlen zu erläutern. Es sey daher $a = 3$ und $b = 2$; so hat man $a + b = 5$ und $a - b = 1$; ferner $aa = 9$, $ab = 6$, $bb = 4$. Also ist $aa + ab + bb = 19$ und $aa - ab + bb = 7$. Folglich wird dieses Product verlangt:

$$5 \cdot 19 \cdot 1 \cdot 7, \text{ welches ist } 665.$$

Es ist aber $a^6 = 729$ und $b^6 = 64$, folglich $a^6 - b^6 = 665$, wie wir schon gesehen haben.