360.

Diese Betrachtung führt uns aber noch weiter und lehret wie man auch von solchen Wurzeln die aus mehr als zwey Theilen bestehen, alle Potestäten finden soll. Wir wollen dieses nur mit der dritten Potestät von $a+b+c$ erläutern, worinnen alle mögliche Zusammensetzungen von dreyen Buchstaben als Glieder vorkommen müßen, und ein jedes die Anzahl aller seiner Versetzungen zum Coefficient haben wird: also wird diese dritte Potestät oder $(a+b+c)^3$ seyn:

$$a^3+3aab+3aac+3abb+6abc+3acc+b^3+3bbc+3bcc+c^3.$$

Laßt uns setzen es sey $a=1$, $b=1$, $c=1$ so wird der Cubus von $1+1+1$ das ist von 3, seyn:

$$1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27.$$

Setzt man $a=1$, $b=1$ und $c=-1$, so wird der Cubus von $1+1-1$ das ist von 1 seyn:

$$1+3-3+3-6+3+1-3+3-1=1.$$

## CAPITEL 12

## VON DER ENTWICKELUNG DER IRRATIONAL-POTESTÄTEN DURCH UNENDLICHE REIHEN

361.

Da wir gezeigt haben, wie von der Wurzel $a+b$ eine jegliche Potestät gefunden werden soll, der Exponent mag so groß seyn als er nur immer will, so sind wir im Stande auf eine allgemeine Art die Potestät von $a+b$ auszudrucken, wann der Exponent auch unbestimmt, und durch einen Buchstaben $n$ ausgedrückt ist.

Also werden wir nach der obigen gegebenen Regul finden

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ etc.}$$

362.

Wollte man die gleiche Potestät von der Wurzel $a-b$ nehmen, so darf man nur die Zeichen des 2ten, 4ten, 6ten, etc. Gliedes verändern, woher man haben wird

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ etc.}$$

363.

Diese Formeln dienen uns um alle Arten von Wurzeln auszudrücken. Dann da wir gezeigt haben wie die Wurzeln auf gebrochene Exponenten gebracht werden können, und daß

$$\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \text{ und } \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}} \text{ u. s. f.}$$

so wird auch seyn:

$$\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}} \text{ und } \sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}} \text{ u. s. f.}$$

dahero um die Quadratwurzel von $a+b$ zu finden haben wir nur nöthig in der obigen allgemeinen Formel für den Exponenten $n$ den Bruch $\frac{1}{2}$ zu setzen, daher wir erstlich für die Coefficienten bekommen werden

$$\frac{n}{1} = \frac{1}{2},\ \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4},\ \frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6},\ \frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8},\ \frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10},\ \frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}.$$

Hernach ist

$$a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \text{ und } a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}},\ a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}},\ a^{n-3} = \frac{1}{aa\sqrt{a}} \text{ etc.}$$

Oder man kann diese Potestäten von $a$ auch also ausdrücken

$$a^n = \sqrt{a},\ a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a},\ a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2},\ a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3},\ a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4} \text{ etc.}$$

364.

Dieses voraus gesetzt wird die Quadrat-Wurzel aus $a+b$ folgender gestalt ausgedrückt werden

$$\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \frac{1}{2}b\frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}bb\frac{\sqrt{a}}{aa} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}b^3\frac{\sqrt{a}}{a^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}b^4\frac{\sqrt{a}}{a^4} \text{ etc.}$$

365.

Wann nun $a$ eine Quadrat-Zahl ist, so kann $\sqrt{a}$ angegeben, und also die Quadrat-Wurzel aus $a+b$, ohne Wurzel-Zeichen durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden.

Also wann $a=cc$ so ist $\sqrt{a}=c$, und man wird haben

$$\sqrt{(cc+b)}=c+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{c}-\frac{1}{8}\cdot\frac{bb}{c^3}+\frac{1}{16}\cdot\frac{b^3}{c^5}-\frac{5}{128}\cdot\frac{b^4}{c^7}\text{ etc.}$$

Hierdurch kann man aus einer jeglichen Zahl die Quadrat-Wurzel ausziehen, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, davon einer ein Quadrat ist welcher durch $cc$ angedeutet wird. Will man z. E. die Quadrat-Wurzel von 6 haben, so setzt man $6=4+2$, und da wird $cc=4$, $c=2$ und $b=2$, dahero bekommt man $\sqrt{6}=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\frac{5}{1024}$ etc. Nimmt man hiervon nur die zwey ersten Glieder, so bekommt man $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, wovon das Quadrat $\frac{25}{4}$ nur um $\frac{1}{4}$ größer ist als 6. Nimmt man drey Glieder so hat man $2\frac{7}{16}=\frac{39}{16}$, wovon das Quadrat $\frac{1521}{256}$ nur um $\frac{15}{256}$ zu klein ist.

366.

Bey eben diesem Exempel, weil $\frac{5}{2}$ der Wahrheit schon sehr nahe kommt, so kann man setzen $6=\frac{25}{4}-\frac{1}{4}$.

Also wird $cc=\frac{25}{4}$, $c=\frac{5}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$. Woraus wir nur die zwey ersten Glieder berechnen wollen, da dann kommt

$$\sqrt{6}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}-\frac{1}{20}=\frac{49}{20},$$

wovon das Quadrat $\frac{2401}{400}$ nur um $\frac{1}{400}$ größer ist als 6.

Setzen wir nun $6=\frac{2401}{400}-\frac{1}{400}$ so wird $c=\frac{49}{20}$ und $b=-\frac{1}{400}$. Woraus wiederum nur die zwey ersten Glieder genommen geben

$$\sqrt{6}=\frac{49}{20}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\frac{49}{20}-\frac{1}{1960}=\frac{4801}{1960}$$

wovon das Quadrat $=\frac{23049601}{3841600}$. Nun aber ist $6=\frac{23049600}{3841600}$, also ist der Fehler nur $\frac{1}{3841600}$.

367.

Eben so kann man auch die Cubic-Wurzel aus $a + b$ durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Dann da $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ so wird in unserer allgemeinen Formel $n = \frac{1}{3}$, und daher für die Coefficienten

$$\frac{n}{1} = \frac{1}{3}, \quad \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{n-2}{3} = -\frac{5}{9}, \quad \frac{n-3}{4} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{n-4}{5} = -\frac{11}{15} \text{ etc.}$$

Für die Potestäten von $a$ aber ist

$$a^n = \sqrt[3]{a}, \quad a^{n-1} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}, \quad a^{n-2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{aa}, \quad a^{n-3} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} \text{ etc.}$$

dahero erhalten wir

$$\sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3} \cdot b \frac{\sqrt[3]{a}}{a} - \frac{1}{9} \cdot bb \frac{\sqrt[3]{a}}{aa} + \frac{5}{81} \cdot b^3 \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} - \frac{10}{243} \cdot b^4 \frac{\sqrt[3]{a}}{a^4} \text{ etc.}$$

368.

Wann also $a$ ein Cubus nemlich $a = c^3$ so wird $\sqrt[3]{a} = c$, und also fallen die Wurzel-Zeichen weg. Dahero man haben wird

$$\sqrt[3]{(c^3 + b)} = c + \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{cc} - \frac{1}{9} \cdot \frac{bb}{c^5} + \frac{5}{81} \cdot \frac{b^3}{c^8} - \frac{10}{243} \cdot \frac{b^4}{c^{11}} \text{ etc.}$$

369.

Durch Hülfe dieser Formel kann man nun die Cubic-Wurzel von einer jeglichen Zahl durch die Näherung finden, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, wie $c^3 + b$, davon der erste ein Cubus ist.

Also wann man die Cubic-Wurzel von 2 verlangt, so setze man $2 = 1 + 1$, da wird $c = 1$ und $b = 1$, folglich $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$ etc. wovon die zwey ersten Glieder geben $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ dessen Cubus $\frac{64}{27}$ um $\frac{10}{27}$ zu groß ist. Man setze demnach $2 = \frac{64}{27} - \frac{10}{27}$, so wird $c = \frac{4}{3}$ und $b = -\frac{10}{27}$ und dahero

$$\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}.$$

Diese zwey Glieder geben $\frac{4}{3} - \frac{5}{72} = \frac{91}{72}$, wovon der Cubus ist $\frac{753571}{373248}$. Nun aber ist $2 = \frac{746496}{373248}$ also ist der Fehler $\frac{7075}{373248}$. Und solcher Gestalt kann man wann man will, immer näher kommen, insonderheit wann man mehr Glieder nehmen will.