CAPITEL 7

VON DEN BRÜCHEN ÜBERHAUPT

68.

Wenn sich eine Zahl als zum Ex. 7 durch eine andere als 3 nicht theilen läßt, so ist dieses nur so zu verstehen, daß sich der Quotus nicht durch eine gantze Zahl ausdrucken läßt, keines weges aber, daß es an sich unmöglich sey, sich einen Begriff von dem Quotus zu machen.

Man darf sich nur eine Linie, die 7 Fuß lang ist, vorstellen, so wird wohl niemand zweifeln, daß es nicht möglich sein sollte, diese Linie in 3 gleiche Theile zu zerschneiden und sich einen Begriff von der Größe eines solchen Theils zu machen.

69.

Da man sich nun einen deutlichen Begriff von dem Quotus, der in solchen Fällen herauskommt machen kan, obgleich derselbe keine gantze Zahl ist, so werden wir hierdurch auf eine besondere Art von Zahlen geleitet, welche *Brüche* oder *gebrochene Zahlen* genennt werden.

Also haben wir in obigem Exempel, wo 7 durch 3 dividirt werden soll, einen deutlichen Begriff von dem daher entspringenden Quotus und man pflegt denselben auf folgende Art anzuzeigen $\frac{7}{3}$; wo die obengesetzte Zahl 7 das Dividend und die untengesetzte Zahl 3 der Divisor ist.

70.

Wann also auf eine allgemeine Art die Zahl a, durch die Zahl b, getheilt werden soll, so wird der Quotus durch $\frac{a}{b}$ angedeutet, welche Schreib-Art ein Bruch genennt wird; dahero man sich keinen beßern Begriff von einem solchen Bruch $\frac{a}{b}$ machen kann, als daß man sagt, es werde dadurch der Quotus angezeigt, welcher entspringe, wann man die obere Zahl durch die untere Zahl dividire. Hierbey ist noch zu mercken, daß bey allen dergleichen Brüchen, die untere Zahl der *Nenner*, die obere aber der *Zehler* genennt zu werden pflegt.

71.

In dem oben angeführten Bruch $\frac{7}{3}$, welcher mit dem Worte Sieben Drittel ausgesprochen wird, ist 7 der Zehler und 3 der Nenner. Eben so heißt dieser Bruch

$\frac{2}{3}$ zwey Drittel $\quad$ $\frac{3}{4}$ drey Viertheil

$\frac{3}{8}$ drey Achtel $\quad$ $\frac{12}{100}$ zwölff Hunderttheil.

Dieser Bruch aber $\frac{1}{2}$ wird genennet ein halbes, anstatt ein zweytel; dann eigentlich ist $\frac{1}{2}$ der Quotus, welcher heraus kommt, wann man 1 in zwey gleiche Theile zerschneidet, da dann wie bekandt ein solcher Theil ein halbes genennt wird.

72.

Um die Natur der Brüche recht kennen zu lernen, wollen wir erstlich diesen Fall betrachten, wo die obere Zahl der untern, oder der Zehler dem Nenner gleich ist, als $\frac{a}{a}$. Weil nun dadurch der Quotus angedeutet wird, der heraus kommt, wann man a durch a dividiret: so ist klar, daß dieser Quotus just 1 ist, folglich ist dieser Bruch $\frac{a}{a}$ so viel als 1, oder ein Gantzes, daher sind folgende Brüche

$$\frac{2}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{5},\ \frac{6}{6},\ \frac{7}{7},\ \frac{8}{8},\ \text{u. s. f.}$$

alle einander gleich, und ein jeder derselben ist so viel als Eins, oder ein Gantzes.

73.

Da nun ein jeder Bruch, deßen Zehler dem Nenner gleich ist, Eins beträgt, so sind alle Brüche, deren Zehler kleiner sind als ihre Nenner, weniger als Eins. Dann wann ich eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren soll, so kommt weniger als 1 heraus; wann z. E. eine Linie von 2 Fuß in 3 gleiche Theile zerschnitten werden soll, so wird ein Theil ohnstreitig kleiner seyn als ein Fuß, dahero offenbar daß $\frac{2}{3}$ weniger als 1, und dieses eben deswegen, weil der Zehler 2 kleiner ist als der Nenner 3.

74.

Wann hingegen der Zehler größer ist als der Nenner, so ist der Werth des Bruchs größer als Eins. Also ist $\frac{3}{2}$ mehr als 1, weil $\frac{3}{2}$ so viel ist als $\frac{2}{2}$ und noch $\frac{1}{2}$. Nun aber ist $\frac{2}{2}$ so viel als 1, folglich ist $\frac{3}{2}$ so viel als $1\frac{1}{2}$ nehmlich ein Gantzes und noch ein halbes. Eben so ist:

$$\frac{4}{3} \text{ so viel als } 1\frac{1}{3}; \text{ ferner } \frac{5}{3} \text{ so viel als } 1\frac{2}{3}; \text{ weiter } \frac{7}{3} \text{ so viel als } 2\frac{1}{3}.$$

Und überhaupt darf man in diesen Fällen nur die obere Zahl durch die untere dividiren, und zum Quotus noch einen Bruch hinzusetzen, deßen Zehler der Rest, der Nenner aber der Divisor ist. Also für den Bruch $\frac{43}{12}$, dividirt man 43 durch 12 und bekommt 3 zum Quotus und 7 zum Rest, daher ist $\frac{43}{12}$ so viel als $3\frac{7}{12}$.

75.

Hieraus sieht man, wie Brüche deren Zehler größer sind als ihre Nenner, in zwey Glieder aufgelößt werden können, wovon das erste eine gantze Zahl ausmacht das andre aber ein Bruch, deßen Zehler kleiner ist als sein Nenner. Aus diesem Grunde werden solche Brüche, wo der Zehler größer ist als der Nenner, *unächte Brüche* genennt, weil sie eins, oder mehr Gantze in sich begreifen. Hingegen sind die *ächten Brüche* solche, deren Zehler kleiner sind als die Nenner, und deren Werth folglich weniger ist als Eins, oder weniger als ein Gantzes.

76.

Man pflegt sich die Natur der Brüche noch auf eine andere Art vorzustellen, wodurch die Sache nicht wenig erleutert wird: Wann man z. E. den Bruch $\frac{3}{4}$ betrachtet, so ist klar daß derselbe 3 mal größer ist als $\frac{1}{4}$. Nun aber bestehet die Bedeutung des Bruchs $\frac{1}{4}$ darinnen, daß wann man 1 in 4 gleiche Theile zertheilt, ein solcher Theil den Werth desselben anzeiget; wann man daher solcher drey Theile zusammennimt, so erhält man den Werth des Bruchs $\frac{3}{4}$.

Eben so kan man einen jeglichen andern Bruch betrachten, als $\frac{7}{12}$: wann man 1 in 12 gleiche Theile zerschneidet, so machen 7 dergleichen Theile den Werth des vorgelegten Bruchs aus.

77.

Aus dieser Vorstellung sind auch die oben erwehnten Nahmen des Zehlers und Nenners entsprungen. Dann weil in dem vorigen Bruch $\frac{7}{12}$ die untere Zahl 12 anzeiget, daß 1 in 12 gleiche Theile zertheilt werden müße, und also diese Theile benennet, so wird dieselbe füglich der Nenner genennt.

Da aber die obere Zahl, nemlich 7, anzeigt, daß für den Werth des Bruchs 7 dergleichen Theile zusammen genommen werden müßen, und also dieselbe gleichsam darzehlet, so wird die obere Zahl der Zehler genennt.

78.

Betrachten wir nun die Brüche, deren Zehler 1 ist, als solche, die den Grund der übrigen enthalten, weil man leicht begreift was $\frac{3}{4}$ sind, wann man weis was $\frac{1}{4}$ ist, so sind dergleichen Brüche folgende

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \text{ u. s. f.}$$

Hierbey ist zu mercken, daß diese Brüche immer kleiner werden; dann in je mehr Theile ein Gantzes zerschnitten wird, desto kleiner werden auch die Theile, also ist $\frac{1}{100}$ kleiner als $\frac{1}{10}$; und $\frac{1}{1000}$ kleiner als $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10000}$ kleiner als $\frac{1}{1000}$ und $\frac{1}{100000}$ kleiner als $\frac{1}{10000}$.

79.

Hieraus sieht man nun, daß je mehr bey solchen Brüchen der Nenner vergrößert werde, die Bedeutung derselben um so viel kleiner werden müße. Hiebey entsteht nun die Frage, ob der Nenner nicht so groß angenommen werden könne, daß der Bruch gäntzlich verschwinde und zu nichts werde? Dieses aber wird mit Recht verneint, dann in so viel gleiche Theile man auch immer Eins, z. E. die Länge eines Fußes, zertheilen mag, so behalten die Theile doch noch immer eine gewiße Größe und sind folglich nicht nichts.

80.

Es ist zwar wahr, daß wann man die Länge eines Fußes in mehr als 1000 gleiche Theile zertheilt, die Theile fast nicht mehr in die Augen fallen. So bald man sie aber durch ein gut Mikroscopium betrachtet, so erscheinen dieselben so groß, daß sie leicht von neuem in 100 und noch mehrere Theilichen könnten zertheilt werden.

Hier ist aber die Rede keinesweges was wir verrichten können, oder von dem was würcklich kan verrichtet werden, und was noch in die Augen fällt, sondern vielmehr von demjenigen was an sich möglich ist. Und da ist allerdings gewis, daß so groß auch immer der Nenner angenommen werden mag, der Bruch gleichwohl nicht gänzlich verschwinde, oder in nichts, oder 0, verwandelt werde.

81.

Weil man nun, so sehr auch der Nenner vermehret würde, niemals gäntzlich zu nichts kommt, sondern diese Brüche noch immer einige Größe behalten, und also die obengesetzte Reihe der Brüche immer weiter ohne End fortgesetzt werden kann, so pflegt man zu sagen, daß der Nenner unendlich groß seyn müßte, wann endlich der Bruch zu 0 oder nichts werden sollte. Dann das Wort *unendlich* will hier eben so viel sagen als daß man mit dem gemeldeten Bruche niemals zu Ende komme.

82.

Um nun diesen Begriff, welcher allerdings festgegründet ist, vorzustellen, so bedienet man sich dazu dieses Zeichens ∞, welches eine unendlich große Zahl andeutet: und daher kann man sagen, daß dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ ein würckliches Nichts sey, eben deswegen, weil ein solcher Bruch niemahlen Nichts werden kan, so lange der Nenner noch nicht ins unendliche vermehret worden.

83.

Dieser Begriff von dem unendlichen ist desto sorgfältiger zu bemercken, weil derselbe aus den ersten Gründen unserer Erkäntniß ist hergeleitet worden, und in dem folgenden von der größten Wichtigkeit seyn wird. Es laßen sich schon hier daraus schöne Folgen ziehen, welche unsere Aufmercksamkeit verdienen, da dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ den Quotus anzeigt, wann man das Dividend 1 durch den Divisor ∞ dividiret. Nun wißen wir schon, daß wann man das Dividend 1 durch den Quotus, welcher ist $\frac{1}{\infty}$ oder 0 wie wir gesehen haben, dividiret, alsdann der Divisor nemlich ∞ heraus komme; daher erhalten wir einen neuen Begriff von dem Unendlichen, nemlich daß dasselbe herauskomme wann man 1 durch 0 dividiret; folglich kan man mit Grund sagen, daß 1 durch 0 dividiret eine unendlich große Zahl oder ∞ anzeige.

84.

Hier ist nöthig noch einen ziemlich gemeinen Irrthum aus dem Weg zu räumen, indem viele behaupten, ein unendlich großes könne weiter nicht vermehret werden. Dieses aber kan mit obigen richtigen Gründen nicht bestehen. Dann da $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl andeutet, und $\frac{2}{0}$ ohnstreitig zweymal so groß ist; so ist klar, daß auch so gar eine unendlich große Zahl noch 2mal größer werden könne.

CAPITEL 8

VON DEN EIGENSCHAFFTEN DER BRÜCHE

85.

Wie wir oben gesehen haben, daß jeder dieser Brüche,

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \text{ und so fort,}$$

ein Gantzes ausmache und folglich alle unter einander gleich sind; so sind auch folgende Brüche,

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich, weil ein jeder derselben zwey gantze ausmacht: dann es giebt der Zehler eines jeglichen, durch seinen Nenner dividirt 2. Eben so sind alle diese Brüche,

$$\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5}, \frac{18}{6}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich, weil der Werth eines jeglichen 3 beträgt.

86.

Gleicher Gestalt läßt sich auch der Werth eines jeglichen Bruchs auf unendlich vielerley Arten vorstellen. Denn wann man so wohl den Zehler als den Nenner eines Bruchs mit eben derselben Zahl, so nach Belieben ge-