daher kan man noch weiter finden:

$$\mathfrak{l}6 = x + y,\ \mathfrak{l}12 = 2x + y,\ \mathfrak{l}18 = x + 2y,$$

imgleichen auch $$\mathfrak{l}15 = \mathfrak{l}3 + \mathfrak{l}5 = y + 1 - x.$$

241.

Wir haben oben gesehen, daß alle Zahlen aus den so genannten Prim-Zahlen durch die Multiplication hervor gebracht werden. Also wann nun die Logarithmen der Prim-Zahlen bekannt wären, so könnte man daraus die Logarithmen aller andern Zahlen blos durch die Addition finden; als z. E. von der Zahl 210 welche aus folgenden Factoren besteht, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, wird seyn der Logarithmus $= \mathfrak{l}2 + \mathfrak{l}3 + \mathfrak{l}5 + \mathfrak{l}7$; gleicher gestalt da $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, so wird $\mathfrak{l}360 = 3\mathfrak{l}2 + 2\mathfrak{l}3 + \mathfrak{l}5$, woraus erhellet, wie man aus den Logarithmen der Prim-Zahlen die Logarithmen von allen andern Zahlen bestimmen kann. Also bey Verfertigung der Logarithmischen Tabellen hat man nur dafür zu sorgen, daß die Logarithmen von allen Prim-Zahlen gefunden werden.

CAPITEL 23

VON DER ART DIE LOGARITHMEN VORZUSTELLEN

242.

Wir haben gesehen, daß der Logarithmus von 2 größer ist als $\frac{3}{10}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$; oder daß der Exponent von 10 zwischen diesen zwey Brüchen fallen müße, wann die Potestät dem 2 gleich werden soll: man mag aber einen Bruch annehmen, was man immer für einen will, so wird die Potestät immer eine Irrational-Zahl und entweder größer oder kleiner als 2 seyn, dahero sich der Logarithmus von 2 durch keinen solchen Bruch ausdrücken läßt. Man muß sich deswegen begnügen den Werth desselben durch Annäherungen so genau zu bestimmen, daß der Fehler unmercklich werde. Hierzu bedienet man sich der so genannten Decimal-Brüche, deren Natur und Beschaffenheit deutlich erklärt zu werden verdient.

243.

Man weiß, daß in der gewöhnlichen Art alle Zahlen mit den zehn Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

zu schreiben, dieselben nur auf der ersten Stelle zur rechten Hand ihre natürliche Bedeutung haben, und daß auf der zweyten Stelle ihre Bedeutung 10 mal größer werde, auf der dritten aber 100 mal, auf der vierten 1000 mal, und so fort auf einer jeden folgenden Stelle 10 mal größer als auf der vorhergehenden.

Also in dieser Zahl 1765 steht auf der ersten Stelle zur rechten die Ziffer 5 die auch würcklich 5 bedeutet, auf der zweyten Stelle steht 6, welche aber nicht 6, sondern $10 \cdot 6$ oder 60 anzeigt; die Ziffer 7 auf der dritten Stelle bedeutet $100 \cdot 7$ oder 700, und endlich das 1 auf der vierten Stelle bedeutet 1000, und so wird auch diese Zahl ausgesprochen, indem man sagt:

Ein Tausend, Sieben Hundert, Sechzig, und Fünf.[1])

244.

Wie nun von der rechten zur lincken die Bedeutung der Ziffern immer 10 mal größer und folglich von der lincken zur rechten immer 10 mal kleiner wird, so kann man nach diesem Gesetz noch weiter gehen und gegen die rechte Hand fortrücken, da dann die Bedeutung der Ziffern immer fort 10 mahl kleiner wird. Hier muß man aber die Stelle wohl bemercken, wo die Ziffern ihren natürlichen Wert haben, dieses geschieht durch ein Comma, so hinter diese Stelle gesetzt wird. Wann man dahero diese Zahl geschrieben findet als 36, 54892, so ist dieselbe also zu verstehen: erstlich hat die Ziffer 6 ihre natürliche Bedeutung, und die Ziffer 3 auf der zweyten Stelle von der lincken 30. Aber nach dem Comma bedeutet die Ziffer 5 nur $\frac{5}{10}$, die folgenden 4 sind $\frac{4}{100}$, die Ziffer 8 bedeutet $\frac{8}{1000}$, die Ziffer 9 $\frac{9}{10000}$ und die Ziffer 2 $\frac{2}{100000}$; woraus man sieht, daß je weiter diese Ziffern nach der rechten Hand fortgesetzt werden, ihre Bedeutungen immer kleiner und endlich so klein werden, daß sie vor nichts zu achten sind.

245.

Diese Art die Zahlen auszudrücken heißt nun ein Decimal-Bruch, und auf diese Art werden auch die Logarithmen in den Tabellen dargestellt. Da-

1) Siehe die Anmerkung p. 3. H. W.

selbst wird z. E. der Logarithmus von 2 also ausgedruckt 0,3010300. Wobey folglich zu mercken, daß weil vor dem Comma 0 steht, dieser Logarithmus auch kein Gantzes betrage, und daß sein Werth sey

$$\frac{3}{10}+\frac{0}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{0}{10000}+\frac{3}{100000}+\frac{0}{1000000}+\frac{0}{10000000}.$$

Man hätte also wohl die zwey hintersten 0 weglaßen können, allein dieselben dienen um zu zeigen daß von diesen Theilgen würcklich keine vorhanden sind. Man läugnet aber nicht, daß nicht weiter noch kleinere Theilgen folgen sollten, welche man aber wegen ihrer Kleinigkeit für nichts achtet.

246.

Den Logarithmus von 3 findet man also ausgedrückt 0,4771213; woraus man sieht, daß derselbe kein Gantzes betrage, sondern daß er aus diesen Brüchen bestehe

$$\frac{4}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{2}{100000}+\frac{1}{1000000}+\frac{3}{10000000}.$$

Man muß aber nicht glauben, daß dieser Logarithmus solchergestallt gantz genau ausgedrückt sey. Doch aber weiß man so viel, daß der Fehler gewiß kleiner ist als $\frac{1}{10000000}$, welcher auch würcklich so klein ist, daß man ihn in den meisten Rechnungen aus der Acht laßen kann.

247.

Nach dieser Art heißt der Logarithmus von 1 also 0,0000000, weil derselbe würcklich 0 ist; von 10 aber heißt der Logarithmus 1,0000000, woraus man erkennt, daß derselbe just 1 sey. Von 100 aber ist der Logarithmus 2,0000000, oder just 2, woraus zu sehen daß von den Zahlen zwischen 10 und 100, oder welche mit zwey Ziffern geschrieben werden, die Logarithmen zwischen 1 und 2 enthalten seyn müßen, und folglich durch 1 und einen Decimal-Bruch ausgedrückt werden. Also ist $\mathfrak{l}\,50 = 1{,}6989700$, derselbe ist also 1 und noch über das $\frac{6}{10}+\frac{9}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{9}{10000}+\frac{7}{100000}$. Von den Zahlen aber über hundert bis 1000 enthalten die Logarithmen 2 nebst einem gesetzten Decimal-Bruch; als $\mathfrak{l}\,800 = 2{,}9030900$. Von 1000 bis 10000 sind die Logarithmen größer als 3. Von 10000 bis 100000 größer als 4 und so fort.

248.

Von den Zahlen unter 10 aber, welche nur mit einer Ziffer geschrieben werden, ist der Logarithmus noch kein Gantzes, und deswegen steht vor dem Comma eine 0. Bey einem jeden Logarithmus sind also zwey Theile zu bemercken. Der erste steht vor dem Comma und zeigt die Gantzen an, wann dergleichen vorhanden; der andre Theil aber zeigt die Decimal-Brüche an, die zu dem Gantzen noch gesetzt werden müßen. Also ist es leicht den ersten oder gantzen Theil des Logarithmus einer jeglichen Zahl anzugeben, weil derselbe 0 ist für alle Zahlen, die nur aus einer Ziffer bestehen. Für die Zahlen die aus 2 Ziffern bestehen, ist derselbe 1. Derselbe ist ferner 2 für diejenige, so aus 3 Ziffern bestehen, und so fort ist derselbe immer um eins kleiner als die Anzahl der Ziffern. Wann man also den Logarithmus von 1766 verlangt, so weiß man schon, daß der erstere oder gantze Theil davon 3 seyn muß.

249.

Umgekehrt also, so bald man den ersten Theil eines Logarithmus ansieht, so weis man aus wie viel Figuren die Zahl selbst bestehen werde, weil die Anzahl der Figuren immer um eins größer ist als der gantze Theil des Logarithmus. Wann man also für eine unbekante Zahl diesen Logarithmus gefunden hätte 6,4771213, so wüßte man so gleich daß dieselbe Zahl aus 7 Figuren bestehe und also größer seyn müße als 1000000. Diese Zahl ist auch würcklich 3000000: dann $\mathfrak{l}3000000 = \mathfrak{l}3 + \mathfrak{l}1000000$. Nun aber ist $\mathfrak{l}3 = 0{,}4771213$ und $\mathfrak{l}1000000 = 6$, welche zwey Logarithmus zusammen addirt geben 6,4771213.

250.

Bei einem jeglichen Logarithmus kommt also die Hauptsach auf den nach dem Comma folgenden Decimal-Bruch an, welcher wann er einmahl bekant ist, für viele Zahlen dienen kann. Um dieses zu zeigen, wollen wir den Logarithmus der Zahl 365 betrachten deßen erster Theil ohnstreitig 2 ist, für den andern Theil aber, nemlich den Decimal-Bruch, wollen wir der Kürze halber den Buchstaben x schreiben, also daß $\mathfrak{l}365 = 2 + x$; hieraus erhalten wir, wann wir immerfort mit 10 multipliciren,

$$\mathfrak{l}3650 = 3 + x;\ \mathfrak{l}36500 = 4 + x;\ \mathfrak{l}365000 = 5 + x.$$

Wir können auch zurück gehen und immer durch 10 dividiren so bekommen wir

$$\mathfrak{l}36{,}5 = 1 + x;\ \mathfrak{l}3{,}65 = 0 + x;\ \mathfrak{l}0{,}365 = -1 + x;\ \mathfrak{l}0{,}0365 = -2 + x;$$

$$\mathfrak{l}0{,}00365 = -3 + x \text{ und so ferner.}$$

251.

Vor alle diese Zahlen nun, welche aus den Ziffern 365 entstehen, sie mögen 0 hinter oder vor sich haben, bleibt einerley Decimal-Bruch in ihren Logarithmus und der Unterscheid befindet sich nur in der gantzen Zahl vor dem Comma, welche wie wir gesehen auch negativ werden kann, wann nemlich die Zahl kleiner als 1 wird. Weil nun die gemeinen Rechner nicht wohl mit den Negativ-Zahlen umgehen können, so wird in diesen Fällen die gantze Zahl der Logarithmen um 10 vermehret, und anstatt 0 vor dem Comma, pflegt man schon 10 zu schreiben, da man dann anstatt -1 bekommt 9; anstatt -2 bekommt man 8; anstatt -3 bekommt man 7, und so fort. Hier muß aber gar nicht aus der Acht gelaßen werden, daß die gantze Zahlen vor dem Comma um 10 zu groß angenommen worden, damit man nicht schließe die Zahl bestehe aus 10 oder 9 oder 8 Figuren, sondern daß die Zahl erst nach dem Comma entweder auf der ersten Stelle, wann 9 vorhanden, oder auf der zweyten Stelle, wann 8 vorhanden, oder gar erst auf der dritten, wann 7 am Anfang des Logarithmus steht, zu schreiben angefangen werden muß. Auf solche Art findet man die Logarithmen der Sinus in den Tabellen vorgestellt.

252.

In den gewöhnlichen Tabellen bestehen die Decimal-Brüche für die Logarithmen in sieben Figuren, wovon also die letzte $\frac{1}{10000000}$ Theile andeutet, und man kann sicher seyn, daß dieselben um kein einziges solches Theilgen von der Wahrheit abweichen, welcher Fehler gemeiniglich nichts zu bedeuten hat. Wollte man aber noch genauer rechnen, so müßten die Logarithmen noch auf mehr als sieben Figuren vorgestellet werden, welches in den großen VLACQischen Tabellen geschieht, allwo die Logarithmen auf zehn Figuren berechnet sind.

253.

Weil der erste Theil eines Logarithmus keine Schwierigkeit hat, so wird derselbe in den Tabellen nicht gesetzt oder angezeigt, sondern man findet daselbst nur die sieben Figuren des Decimal-Bruchs, welche den zweyten Theil ausmachen. In den Englischen Tabellen findet man dieselben für alle Zahlen bis auf 100000 ausgedrückt und wann größere Zahlen noch vorkommen, so sind kleine Täfelgen beygefügt woraus man ersehen kann, wie viel wegen der folgenden Figuren noch zu den Logarithmen addirt werden müße.

254.

Hieraus ist also leicht zu verstehen, wie man aus einem gefundenen Logarithmus hinwiederum die ihm zukommende Zahl aus den Tabellen nehmen soll. Um die Sache beßer zu erläutern, so wollen wir z. E. diese Zahlen 343 und 2401 mit einander multipliciren. Da nun die Logarithmen davon addirt werden müßen, so kommt die Rechnung also zu stehen.

$$\begin{array}{rr}
 & \left.\begin{array}{r} l343 = 2{,}5352941 \\ l2401 = 3{,}3803922 \end{array}\right\} \text{addirt} \\
\hline
 & \left.\begin{array}{r} 5{,}9156863 \\ 6847 \end{array}\right\} \text{subtrahirt} \\
\hline
\text{Giebt allso } 823543. & 16 \qquad\qquad
\end{array}$$

Diese Summa ist nun der Logarithmus des gesuchten Products, und aus desselben ersten Theil 5 erkennen wir, daß das Product aus 6 Figuren bestehe, welche aus dem Decimal-Bruch vermittelst der Tabelle gefunden worden 823543, und dieses ist würcklich das gesuchte Product.

255.

Da bey Ausziehung der Wurzeln die Logarithmen besonders einen wichtigen Vortheil leisten, so wollen wir auch dieses mit einem Exempel erläutern. Es soll aus der Zahl 10 die Quadrat-Wurzel gefunden werden. Da hat man also nur nöthig den Logarithmus von 10 welcher ist 1,0000000 durch 2 zu dividiren, so wird der Quotus 0,5000000 der Logarithmus der gesuchten Wurzel seyn. Dahero die Wurzel selbst aus den Tabellen gefunden wird 3,16228 wovon auch würcklich das Quadrat nur um $\frac{1}{100000}$ Theilichen größer ist als 10.

ENDE DES ERSTEN ABSCHNITTS