CAPITEL 22

VON DEN ÜBLICHEN LOGARITHMISCHEN TABELLEN

232.

In diesen Tabellen wird wie gemeldet zum Grund gelegt, daß die Wurzel $a = 10$ sey; also ist der Logarithmus von einer jeglichen Zahl c derjenige Exponent, zu welchen wann die Zahl 10 erhoben wird, die Potestät der Zahl gleich werde. Oder wann der Logarithmus der Zahl c durch lc angedeutet wird, so hat man immer $10^{lc} = c$.

233.

Wir haben schon bemercket, daß von der Zahl 1 der Logarithmus immer 0 sey, weil $10^0 = 1$, also ist

$$l1 = 0,\ l10 = 1,\ l100 = 2,\ l1000 = 3,\ l10000 = 4,\ l100000 = 5,\ l1000000 = 6;$$

ferner

$$l\frac{1}{10} = -1,\ l\frac{1}{100} = -2,\ l\frac{1}{1000} = -3,\ l\frac{1}{10000} = -4,\ l\frac{1}{100000} = -5,\ l\frac{1}{1000000} = -6.$$

234.

Wie sich nun die Logarithmen von diesen Haupt-Zahlen von sich selbst ergeben, so ist um so viel schwerer die Logarithmen aller übrigen Zahlen zu finden, welche gleich wohl in den Tabellen müßen angezeigt werden. Hier ist auch noch nicht der Ort, eine hinlängliche Anweisung zu geben, wie dieselben gefunden werden sollen, dahero wollen wir nur überhaupt bemercken, was dabey zu beobachten vorkommt.

235.

Da nun $l1 = 0$, und $l10 = 1$, so ist leicht zu erachten daß von allen Zahlen zwischen 1 und 10, ihre Logarithmen zwischen 0 und 1 enthalten seyn müßen, oder sie sind größer als 0, und doch kleiner als 1.

Laßt uns nur die Zahl 2 betrachten, so ist gewiß daß ihr Logarithmus, den wir durch den Buchstaben x andeuten wollen, allso daß $l2 = x$, größer sey als 0, und doch kleiner als 1. Es muß aber eine solche Zahl seyn, daß 10^x just dem 2 gleich werde.

Man kann auch leicht sehen daß x viel kleiner seyn müße als $\frac{1}{2}$, oder daß $10^{\frac{1}{2}}$ größer sey als 2, dann wann man beyderseits die Quadraten nimmt, so wird das Quadrat von $10^{\frac{1}{2}} = 10^1$; das Quadrat von 2 aber wird 4, also viel kleiner. Eben so ist auch $\frac{1}{3}$ für x noch zu groß, oder $10^{\frac{1}{3}}$ ist größer als 2. Denn der Cubus von $10^{\frac{1}{3}} = 10$, der Cubus von 2 aber ist nur 8. Hingegen ist $\frac{1}{4}$ für x angenommen zu klein: dann $10^{\frac{1}{4}}$ ist kleiner als 2, weil die vierte Potestät von jenem 10 ist von diesem aber 16. Hieraus sieht man also daß x oder der $l2$ kleiner ist als $\frac{1}{3}$ und doch größer als $\frac{1}{4}$; man kann auch für einen jeden andern Bruch der zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ ist, finden, ob derselbe zu groß oder zu klein sey. Als $\frac{2}{7}$ ist kleiner als $\frac{1}{3}$ und größer als $\frac{1}{4}$, wollte man nun $\frac{2}{7}$ für x nehmen so müßte $10^{\frac{2}{7}} = 2$ seyn, wann aber dieses wäre, so müßen auch die siebente Potestäten einander gleich seyn: Es ist aber von $10^{\frac{2}{7}}$ die siebente Potestät $= 10^2 = 100$, welche der siebenten Potestät von 2 gleich seyn müßte; da nun die siebente Potestät von 2 $= 128$ und also größer als jene, so ist auch $10^{\frac{2}{7}}$ kleiner als 2 und also $\frac{2}{7}$ kleiner als $l2$: oder $l2$ ist größer als $\frac{2}{7}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

Ein solcher Bruch ist $\frac{3}{10}$; sollte nun $10^{\frac{3}{10}} = 2$ seyn, so müßten auch die zehnte Potestäten einander gleich seyn: Es ist aber von $10^{\frac{3}{10}}$ die zehnte Potestät $= 10^3 = 1000$, von 2 aber ist die zehnte Potestät $= 1024$; woraus wir schließen daß $\frac{3}{10}$ noch zu klein ist, oder daß $l2$ größer sey als $\frac{3}{10}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

236.

Diese Betrachtung dienet um zu zeigen, daß $l2$ seine bestimmte Größe habe, weil wir wißen, daß derselben gewis größer ist als $\frac{3}{10}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$. Weiter können wir hier noch nicht gehen, und weil wir den wahren Werth noch nicht wißen so wollen wir für denselben den Buchstaben x gebrauchen, also daß $l2 = x$, und zeigen wann derselbe gefunden wäre, wie man daraus von unzählig viel andern Zahlen die Logarithmen finden könne;

worzu die oben gegebene Gleichung dienet $\mathfrak{l}cd = \mathfrak{l}c + \mathfrak{l}d$, oder daß der Logarithmus von einem Product gefunden werde, wann man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt.

237.

Da nun $\mathfrak{l}2 = x$, und $\mathfrak{l}10 = 1$, so bekommen wir $\mathfrak{l}20 = x + 1$, und $\mathfrak{l}200 = x + 2$, ferner $\mathfrak{l}2000 = x + 3$ weiter $\mathfrak{l}20000 = x + 4$ und $\mathfrak{l}200000 = x + 5$ u. s. f.

238.

Da ferner $\mathfrak{l}c^2 = 2\mathfrak{l}c$ und $\mathfrak{l}c^3 = 3\mathfrak{l}c$, $\mathfrak{l}c^4 = 4\mathfrak{l}c$ etc. so erhalten wir daher $\mathfrak{l}4 = 2x$, $\mathfrak{l}8 = 3x$, $\mathfrak{l}16 = 4x$, $\mathfrak{l}32 = 5x$, $\mathfrak{l}64 = 6x$ etc. Hieraus finden wir ferner

$$\mathfrak{l}40 = 2x + 1,\ \mathfrak{l}400 = 2x + 2,\ \mathfrak{l}4000 = 2x + 3,\ \mathfrak{l}40000 = 2x + 4 \text{ etc.}$$

$$\mathfrak{l}80 = 3x + 1,\ \mathfrak{l}800 = 3x + 2,\ \mathfrak{l}8000 = 3x + 3,\ \mathfrak{l}80000 = 3x + 4 \text{ etc.}$$

$$\mathfrak{l}160 = 4x + 1,\ \mathfrak{l}1600 = 4x + 2,\ \mathfrak{l}16000 = 4x + 3,\ \mathfrak{l}160000 = 4x + 4 \text{ etc.}$$

239.

Da ferner gefunden worden $\mathfrak{l}\frac{c}{d} = \mathfrak{l}c - \mathfrak{l}d$, so setze man $c = 10$, und $d = 2$, und weil $\mathfrak{l}10 = 1$ und $\mathfrak{l}2 = x$, so bekommen wir $\mathfrak{l}\frac{10}{2}$ das ist $\mathfrak{l}5 = 1 - x$ daher erhalten wir

$$\mathfrak{l}50 = 2 - x,\ \mathfrak{l}500 = 3 - x,\ \mathfrak{l}5000 = 4 - x \text{ etc.}$$

ferner $$\mathfrak{l}25 = 2 - 2x,\ \mathfrak{l}125 = 3 - 3x,\ \mathfrak{l}625 = 4 - 4x \text{ etc.}$$

Daher gelangen wir weiter zu folgenden:

$$\mathfrak{l}250 = 3 - 2x,\ \mathfrak{l}2500 = 4 - 2x,\ \mathfrak{l}25000 = 5 - 2x \text{ etc.}$$

ferner $$\mathfrak{l}1250 = 4 - 3x,\ \mathfrak{l}12500 = 5 - 3x,\ \mathfrak{l}125000 = 6 - 3x \text{ etc.}$$

ferner $$\mathfrak{l}6250 = 5 - 4x,\ \mathfrak{l}62500 = 6 - 4x,\ \mathfrak{l}625000 = 7 - 4x \text{ und so fort.}$$

240.

Hätte man auch den Logarithmus von 3 gefunden so könnte man daher noch von unendlich viel mehrern Zahlen die Logarithmen bestimmen. Wir wollen den Buchstaben y für $\mathfrak{l}3$ setzen, und daher würden wir haben:

$$\mathfrak{l}30 = y + 1,\ \mathfrak{l}300 = y + 2,\ \mathfrak{l}3000 = y + 3, \text{ etc.}$$

$$\mathfrak{l}9 = 2y,\ \mathfrak{l}27 = 3y,\ \mathfrak{l}81 = 4y,\ \mathfrak{l}243 = 5y, \text{ etc.}$$

daher kan man noch weiter finden:

$$\mathfrak{l}\,6 = x + y,\ \mathfrak{l}\,12 = 2x + y,\ \mathfrak{l}\,18 = x + 2y,$$

imgleichen auch $$\mathfrak{l}\,15 = \mathfrak{l}\,3 + \mathfrak{l}\,5 = y + 1 - x.$$

241.

Wir haben oben gesehen, daß alle Zahlen aus den so genannten Prim-Zahlen durch die Multiplication hervor gebracht werden. Also wann nun die Logarithmen der Prim-Zahlen bekannt wären, so könnte man daraus die Logarithmen aller andern Zahlen blos durch die Addition finden; als z. E. von der Zahl 210 welche aus folgenden Factoren besteht, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, wird seyn der Logarithmus $= \mathfrak{l}\,2 + \mathfrak{l}\,3 + \mathfrak{l}\,5 + \mathfrak{l}\,7$; gleicher gestalt da $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, so wird $\mathfrak{l}\,360 = 3\mathfrak{l}\,2 + 2\mathfrak{l}\,3 + \mathfrak{l}\,5$, woraus erhellet, wie man aus den Logarithmen der Prim-Zahlen die Logarithmen von allen andern Zahlen bestimmen kann. Also bey Verfertigung der Logarithmischen Tabellen hat man nur dafür zu sorgen, daß die Logarithmen von allen Prim-Zahlen gefunden werden.

CAPITEL 23

VON DER ART DIE LOGARITHMEN VORZUSTELLEN

242.

Wir haben gesehen, daß der Logarithmus von 2 größer ist als $\frac{3}{10}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$; oder daß der Exponent von 10 zwischen diesen zwey Brüchen fallen müße, wann die Potestät dem 2 gleich werden soll: man mag aber einen Bruch annehmen, was man immer für einen will, so wird die Potestät immer eine Irrational-Zahl und entweder größer oder kleiner als 2 seyn, dahero sich der Logarithmus von 2 durch keinen solchen Bruch ausdrücken läßt. Man muß sich deswegen begnügen den Werth desselben durch Annäherungen so genau zu bestimmen, daß der Fehler unmercklich werde. Hierzu bedienet man sich der so genannten Decimal-Brüche, deren Natur und Beschaffenheit deutlich erklärt zu werden verdient.