mercket worden, daß die verlangte Wurzel a weder in gantzen noch in Brüchen könne ausgedrückt werden. Da nun dieselbe gleichwohl ihren bestimmten Werth haben muß, so sind wir dadurch zu einer neuen Art von Zahlen gelanget, welche Irrational oder Surdische Zahlen genennt werden; von welchen es nach der Mannigfaltigkeit der Wurzeln, so gar unendlich vielerley Arten giebt. Auch hat uns diese Betrachtung noch auf eine gantz besondere Art von Zahlen geleitet, welche unmöglich sind und imaginäre, oder eingebildete Zahlen genennt werden.

219.

Man sieht also, daß uns noch eine Frage zu betrachten übrigen sey, nemlich wann außer der Potestät c noch die Wurzel a für bekant angenommen wird, wie man daraus den Exponenten finden soll? Diese Frage wird uns auf die wichtige Lehre von den Logarithmen leiten, deren Nutzen in der gantzen Mathematic so groß ist, daß fast keine weitlaufige Rechnung ohne Hülfe der Logarithmen zu Stande gebracht werden kann. Wir werden also diese Lehre in dem folgenden Capitel erklären, wo wir wieder auf gantz neue Arten von Zahlen, welche nicht einmahl zu den obigen Irrationalen gerechnet werden können, werden geleitet werden.

CAPITEL 21

VON DEN LOGARITHMEN ÜBERHAUPT

220.

Wir betrachten also diese Gleichung $a^b = c$, und bemercken zuförderst, daß in der Lehre von den Logarithmen für die Wurzel a eine gewiße Zahl nach Belieben festgestellet werde, also daß dieselbe immer einerley Werth behalte. Wann nun der Exponent b also angenommen wird, daß die Potestät a^b einer gegebenen Zahl c gleich werde, so wird der Exponent b der Logarithmus dieser Zahl c genennt, und um dieselben anzuzeigen werde ich mich in zukumfft des Zeichens eines teutschen $\mathfrak{l}$ bedienen, welches der Zahl c vorgesetzt wird; und also schreibt man $b = \mathfrak{l}c$ wodurch angedeutet wird, daß b gleich sey dem Logarithmus der Zahl c, oder der Logarithmus von c sey b.

221.

Nachdem also die Wurzel a einmahl festgestellet worden, so ist der Logarithmus einer jeglichen Zahl c, nichts anders als der Exponent derjenigen Potestät von a, welche der Zahl c gleich ist. Da nun $c = a^b$ so ist b der Logarithmus der Potestät a^b. Setzt man nun $b = 1$, so ist 1 der Logarithmus von a^1, das ist $\mathfrak{l}a = 1$; setzt man $b = 2$, so ist 2 der Logarithmus von a^2, das ist $\mathfrak{l}a^2 = 2$. Eben so wird man haben: $\mathfrak{l}a^3 = 3$, $\mathfrak{l}a^4 = 4$, $\mathfrak{l}a^5 = 5$ und so ferner.

222.

Setzt man $b = 0$, so wird 0 der Logarithmus seyn von a^0: nun aber ist $a^0 = 1$, und also ist $\mathfrak{l}1 = 0$, die Wurzel a mag angenommen werden, wie man will.

Setzt man ferner $b = -1$, so wird -1 der Logarithmus von a^{-1}. Es ist aber $a^{-1} = \frac{1}{a}$; also hat man $\mathfrak{l}\frac{1}{a} = -1$. Eben so bekommt man $\mathfrak{l}\frac{1}{a^2} = -2$, $\mathfrak{l}\frac{1}{a^3} = -3$, $\mathfrak{l}\frac{1}{a^4} = -4$ etc.

223.

Hieraus erhellet wie die Logarithmen von allen Potestäten der Wurzel a und auch so gar von Brüchen, deren Zehler $= 1$, der Nenner aber eine Potestät von a ist, können angezeigt werden; in welchen Fällen die Logarithmen gantze Zahlen sind. Nimmt man aber für b Brüche an, so werden dieselben Logarithmen von Irrational-Zahlen; wann nemlich $b = \frac{1}{2}$ so ist $\frac{1}{2}$ der Logarithmus von $a^{\frac{1}{2}}$ oder von $\sqrt{a}$. Dahero bekommt man $\mathfrak{l}\sqrt{a} = \frac{1}{2}$. Eben so $\mathfrak{l}\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$ und $\mathfrak{l}\sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, und so fort.

224.

Wann aber der Logarithmus von einer andern Zahl c gefunden werden soll, so sieht man leicht, daß derselbe weder eine gantze Zahl noch ein Bruch seyn kann. Inzwischen muß es doch immer einen solchen Exponent geben, nemlich b, so daß die Potestät a^b der gegebenen Zahl c gleich werde, und alsdann hat man $b = \mathfrak{l}c$. Folglich hat man auf eine allgemeine Art $a^{\mathfrak{l}c} = c$.

225.

Laßt uns nun eine andere Zahl d betrachten, deren Logarithmus ebenfals durch $\mathfrak{l}d$ angedeutet wird also daß $a^{\mathfrak{l}d} = d$. Man multiplicire nun diese

Formel mit der vorhergehenden $a^{lc} = c$, so bekommt man $a^{lc+ld} = cd$: nun aber ist der Exponent allezeit der Logarithmus der Potestät; folglich ist $lc + ld = lcd$. Dividirt man aber die erste Formel durch die letztere so bekommt man $a^{lc-ld} = \frac{c}{d}$. Folglich wird $lc - ld = l\frac{c}{d}$.

226.

Hierdurch werden wir zu den zwey Haupt-Eigenschaften der Logarithmen geführet, wovon die erste in der Gleichung $lc + ld = lcd$ besteht, und woraus wir lernen, daß der Logarithmus von einem Product als cd gefunden werde, wann man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt. Die zweyte Eigenschaft ist in der Gleichung $lc - ld = l\frac{c}{d}$ enthalten und zeiget an, daß der Logarithmus von einem Bruch gefunden werde, wann man von dem Logarithmus des Zehlers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

227.

Und eben hierin bestehet der herrliche Nutzen, den die Logarithmen in der Rechenkunst leisten. Weil wann zwey Zahlen mit einander multiplicirt oder dividirt werden sollen, man nur nöthig habe die Logarithmen derselben zu addiren oder zu subtrahiren. Es ist aber offenbar, daß es ungleich viel leichter sey Zahlen zu addiren oder subtrahiren, als zu multipliciren oder dividiren, insonderheit wann die Zahlen sehr groß sind.

228.

Noch wichtiger aber ist der Nutzen bey den Potestäten und der Ausziehung der Wurzeln. Dann wann $d = c$, so hat man aus der erstern Eigenschaft $lc + lc = lcc$, also ist $lcc = 2lc$. Eben so bekommt man $lc^3 = 3lc$ und $lc^4 = 4lc$, und allgemein $lc^n = nlc$.

Nimmt man nun für n gebrochene Zahlen an, so bekommt man $lc^{\frac{1}{2}}$, das ist $l\sqrt{c} = \frac{1}{2}lc$; ferner auch für Negativ-Zahlen lc^{-1} das ist $l\frac{1}{c} = -lc$, und lc^{-2} das ist $l\frac{1}{cc} = -2lc$ und so fort.

229.

Wann man also solche Tabellen hat, worinnen für alle Zahlen die Logarithmen berechnet sind, so kann man durch Hülfe derselben die schwerste

Rechnungen, wo große Multiplicationen und Divisionen imgleichen auch Erhebungen zu Potestäten und Ausziehungen der Wurzeln vorkommen, mit leichter Mühe ausführen, weil man in diesen Tafeln so wohl für jede Zahl ihre Logarithmen, als auch für einen jeden Logarithmus die Zahl selbsten, finden kann. Also wann man aus einer Zahl c die Quadrat-Wurzel finden soll, so sucht man erstlich den Logarithmus der Zahl c welcher ist $\mathfrak{l}c$, hernach nimmt man davon die Hälfte welche ist $\frac{1}{2}\mathfrak{l}c$, und diese ist der Logarithmus von der gesuchten Quadrat-Wurzel: allso die Zahl die diesem Logarithmus zukommt, und in der Tafel gefunden wird, ist die Quadrat-Wurzel selbst.

230.

Wir haben oben gesehen daß die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. und folglich alle Positiv-Zahlen Logarithmen sind von der Wurzel a und ihren positiven Potestäten; das ist von Zahlen die größer sind als Eins.

Hingegen die Negativ-Zahlen als -1, -2 etc. sind Logarithmen von den Brüchen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ etc. welche kleiner sind als Eins, gleichwohl aber noch größer als nichts.

Hieraus folgt, daß wann der Logarithmus positiv ist, die Zahl immer größer sey als Eins; wenn aber der Logarithmus negativ ist, so ist die Zahl immer kleiner als Eins, doch aber größer als 0. Folglich können für Negativ-Zahlen keine Logarithmen angezeigt werden, oder die Logarithmen von Negativ-Zahlen sind unmöglich und gehören zu dem Geschlecht der imaginären oder eingebildeten Zahlen.

231.

Um dieses beßer zu erläutern, wird dienlich seyn für die Wurzel a eine bestimmte Zahl anzunehmen und zwar diejenige, nach welcher die üblichen Logarithmischen Tabellen berechnet sind. Es wird aber darinn die Zahl 10 für die Wurzel a angenommen, weil nach derselben schon die gantze Rechenkunst eingerichtet ist. Man sieht aber leicht, daß dafür eine jegliche andre Zahl, die nur größer ist als Eins, angenommen werden könnte; dann wann man $a = 1$ setzen wollte, so würden alle Potestäten davon als $a^b = 1$, und immer Eins bleiben, und niemals einer andern gegebenen Zahl als c gleich werden können.