CAPITEL 19

VON DER AUSDRÜCKUNG DER IRRATIONAL-ZAHLEN DURCH GEBROCHENE EXPONENTEN

195.

Wir haben eben in dem letzten Capitel von den Potestäten gezeiget, daß das Quadrat von einer jeglichen Potestät gefunden wird, wann man ihren Exponenten verdoppelt, und daß überhaupt das Quadrat oder die zweyte Potestät von a^n sey a^{2n}. Dahero ist hinwiederum von der Potestät a^{2n} die Quadrat-Wurzel a^n, und wird folglich gefunden, wann man den Exponenten derselben halbirt oder durch 2 dividirt.

196.

Also ist von a^2 die Quadrat-Wurzel a^1, von a^4 ist die Quadrat-Wurzel a^2, und von a^6 ist die Quadrat-Wurzel a^3 und so fort. Weil nun dieses eine allgemeine Wahrheit ist, so sieht man, wann die Quadrat-Wurzel von a^3 gefunden werden soll, daß dieselbe $a^{\frac{3}{2}}$ seyn werde. Eben so wird von a^5 die Quadrat-Wurzel seyn $a^{\frac{5}{2}}$. Folglich von der Zahl a selbsten oder von a^1 wird die Quadrat-Wurzel seyn $a^{\frac{1}{2}}$. Woraus erhellet, daß $a^{\frac{1}{2}}$ eben so viel sey als $\sqrt{a}$, welche neue Manier die Quadrat-Wurzel anzudeuten wohl zu bemercken ist.

197.

Wir haben ferner gezeigt, daß um den Cubum von einer Potestät, als a^n, zu finden, man ihren Exponenten mit 3 multipliciren müße, und also der Cubus davon seyn werde a^{3n}.

Wann also rückwärts, von der Potestät a^{3n} die dritte oder die Cubic-Wurzel gefunden werden soll, so ist dieselbe a^n, und man hat nur nöthig den Exponenten jener durch 3 zu dividiren. Also von a^3 ist die Cubic-Wurzel a^1 oder a, von a^6 ist dieselbe a^2, von a^9 ist dieselbe a^3 und so fort.

198.

Dieses muß nun auch wahr seyn, wann sich der Exponent nicht durch 3 theilen läßt, und daher wird von a^2 die Cubic-Wurzel seyn $a^{\frac{2}{3}}$. Und von a^4

ist dieselbe $a^{\frac{4}{3}}$ oder $a^{1\frac{1}{3}}$. Folglich wird auch von der Zahl a selbsten, das ist von a^1, die Cubic- oder dritte Wurzel seyn $a^{\frac{1}{3}}$. Woraus erhellet daß $a^{\frac{1}{3}}$ eben so viel sey als $\sqrt[3]{a}$.

199.

Eben so verhält es sich auch mit den höhern Wurzeln: und die vierte Wurzel von a wird seyn $a^{\frac{1}{4}}$, welches folglich eben so viel ist als $\sqrt[4]{a}$. Gleicher weise wird die fünfte Wurzel von a seyn $a^{\frac{1}{5}}$, welches eben so viel ist als $\sqrt[5]{a}$, und dieses ist auch von allen höhern Wurzeln zu verstehen.

200.

Man könnte nun also die schon längst eingeführte Wurzel-Zeichen gäntzlich entbehren, und anstatt derselben die hier erklärten gebrochenen Exponenten gebrauchen, allein da man einmal an jene Zeichen gewöhnet ist, und dieselben in allen Schriften vorkommen, so ist es nicht rathsam dieselben gäntzlich abzuschafen. Doch wird heut zu Tag diese neue Art auch häuffig gebraucht, als welche die Natur der Sache deutlich in sich faßt. Dann daß $a^{\frac{1}{2}}$ würcklich die Quadrat-Wurzel von a sey, sieht man gleich, wann man nur das Quadrat davon nimt, welches geschieht wann man $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt, da dann offenbahr herauskommt a^1 das ist a.

201.

Hieraus ersieht man auch wie alle übrige gebrochene Exponenten verstanden werden müßen; als wann man hat $a^{\frac{4}{3}}$, so muß von der Zahl a erstlich ihre vierte Potestät a^4 genommen, und hernach die Cubic- oder dritte Wurzel gezogen werden, also daß $a^{\frac{4}{3}}$ eben so viel ist, als nach der gemeinen Art $\sqrt[3]{a^4}$. Eben so wird der Werth von $a^{\frac{3}{4}}$ gefunden, wann man erstlich den Cubum oder die dritte Potestät von a sucht, welche a^3 ist und hernach aus derselben die vierte Wurzel ziehet: Also daß $a^{\frac{3}{4}}$ eben so viel ist als $\sqrt[4]{a^3}$. Eben so ist $a^{\frac{4}{5}}$ eben so viel als $\sqrt[5]{a^4}$ und so weiter.

202.

Wann der Bruch, der den Exponenten vorstellt, größer ist als 1 so läßt sich der Werth auch folgender Gestalt bestimmen. Es sey gegeben $a^{\frac{5}{2}}$, so ist dieses so viel als $a^{2\frac{1}{2}}$, welches heraus kommt, wann man a^2 mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt. Da nun $a^{\frac{1}{2}}$ so viel ist als $\sqrt{a}$, so ist $a^{\frac{5}{2}}$ so viel als $a^2\sqrt{a}$. Eben so ist $a^{\frac{10}{3}}$, das ist $a^{3\frac{1}{3}}$ eben so viel als $a^3\sqrt[3]{a}$; und $a^{\frac{15}{4}}$ das ist $a^{3\frac{3}{4}}$ ist eben so viel als $a^3\sqrt[4]{a^3}$. Aus welchen allen der herrliche Gebrauch der gebrochenen Exponenten genugsam erhellet.

203.

Auch in Brüchen hat derselbe seinen Nutzen. Als wann vorgegeben ist $\frac{1}{\sqrt{a}}$, so ist dieses so viel als $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. Wir haben aber oben gesehen daß ein solcher Bruch $\frac{1}{a^n}$ durch a^{-n} ausgedrückt werden kann, folglich kann $\frac{1}{\sqrt{a}}$ durch $a^{-\frac{1}{2}}$ ausgedrückt werden. Eben so wird $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ seyn $a^{-\frac{1}{3}}$, und $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$ wird verwandelt in $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$ woraus entspringet a^2 multiplicirt mit $a^{-\frac{3}{4}}$, welches ferner verwandelt wird in $a^{\frac{5}{4}}$, das ist $a^{1\frac{1}{4}}$ und das ist ferner $a\sqrt[4]{a}$. Dergleichen Reductionen werden durch die Uebung gar mercklich erleichtert.

204.

Endlich ist noch zu mercken, daß eine jede solche Wurzel auf vielerley Arten kann vorgestellt werden. Dann da $\sqrt{a}$ so viel ist als $a^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{2}$ in alle diese Brüche $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, etc. verwandelt werden kann; so ist klar das $\sqrt{a}$ so viel ist als $\sqrt[4]{a^2}$, im gleichen auch $\sqrt[6]{a^3}$ im gleichen auch $\sqrt[8]{a^4}$ und so fort. Eben so ist $\sqrt[3]{a}$ so viel als $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ aber so viel als $\sqrt[6]{a^2}$ oder $\sqrt[9]{a^3}$ oder $\sqrt[12]{a^4}$. Hieraus sieht man leicht, daß die Zahl a selbst, oder a^1, durch folgende Wurzel-Zeichen könne ausgedruckt werden,

$$\sqrt[2]{a^2}, \text{ oder } \sqrt[3]{a^3}, \text{ oder } \sqrt[4]{a^4}, \text{ oder } \sqrt[5]{a^5} \text{ etc.}$$

205.

Dieses kommt bey der Multiplication und Division wohl zu statten: als z. E. wann $\sqrt[2]{a}$ mit $\sqrt[3]{a}$ multiplicirt werden soll, so schreibe man anstatt $\sqrt[2]{a}$ die $\sqrt[6]{a^3}$, und anstatt $\sqrt[3]{a}$ die $\sqrt[6]{a^2}$. Solcher gestalt hat man gleiche Wurzel-Zeichen, und erhält daher das Product $\sqrt[6]{a^5}$. Welches auch daher erhellet weil $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{3}}$ multiplicirt giebt $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$. Nun aber ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{5}{6}$ und also das Product $a^{\frac{5}{6}}$ oder $\sqrt[6]{a^5}$. Solte $\sqrt[2]{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ durch $\sqrt[3]{a}$ oder $a^{\frac{1}{3}}$ dividirt werden, so bekömmt man $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ das ist $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$ also $a^{\frac{1}{6}}$, folglich $\sqrt[6]{a}$.

CAPITEL 20

VON DEN VERSCHIEDENEN RECHNUNGS-ARTEN UND IHRER VERBINDUNG ÜBERHAUPT

206.

Wir haben bisher verschiedene Rechnungs-Arten als die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, die Erhebung zu Potestäten, und endlich die Ausziehung der Wurzeln, vorgetragen.

Daher wird es nicht wenig zu beßerer Erleuterung dienen, wann wir den Ursprung dieser Rechnungs-Arten und ihre Verbindung unter sich deutlich erklären, damit man erkennen möge, ob noch andere dergleichen Arten möglich seyn oder nicht.

Zu diesem Ende brauchen wir ein neues Zeichen, welches anstatt der bisher so häufig vorgekommenen Redens-Art, *ist so viel als*, gesetzt werden kann. Dieses Zeichen ist nun $=$ und wird ausgesprochen *ist gleich.* Also wann geschrieben wird $a = b$, so ist die Bedeutung, daß a eben so viel sey als b, oder das a dem b gleich sey; also ist z. E. $3 \cdot 5 = 15$.

207.

Die erste Rechnungs-Art, welche sich unserm Verstand darstelt, ist ohnstreitig die Addition, durch welche zwey Zahlen zusammen addirt, oder die Summa derselben gefunden werden soll. Es seyen demnach a und b die zwey