einem Product ab gefunden wird, wann man die Cubic-Wurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt. Und eben so, wann $\sqrt[3]{a}$ durch $\sqrt[3]{b}$ dividirt werden soll, so ist der Quotus $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

Dahero begreift man, daß $2\sqrt[3]{a}$ so viel ist als $\sqrt[3]{8a}$, weil 2 so viel ist als $\sqrt[3]{8}$. Eben so ist $3\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{27a}$, und $b\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{abbb}$. Dahero auch umgekehrt, wann die Zahl hinter dem Zeichen einen Factorem hat der ein Cubus ist, die Cubic-Wurzel daraus vor das Zeichen gesetzt werden kann: Also ist $\sqrt[3]{64a}$ so viel als $4\sqrt[3]{a}$, und $\sqrt[3]{125a}$ so viel als $5\sqrt[3]{a}$. Hieraus folgt, daß $\sqrt[3]{16}$ so viel ist als $2\sqrt[3]{2}$, weil 16 dem $8 \cdot 2$ gleich ist.

167.

Wann die vorgegebene Zahl negativ ist, so hat die Cubic-Wurzel davon keine solche Schwierigkeit, wie oben bey den Quadrat-Wurzeln geschehen; weil nehmlich die Cubi von Negativ-Zahlen auch negativ werden, so sind auch hinwiederum die Cubic-Wurzeln aus Negativ-Zahlen negativ. Also ist $\sqrt[3]{-8}$ so viel als -2, und $\sqrt[3]{-27}$ ist -3. Ferner $\sqrt[3]{-12}$ ist so viel als $-\sqrt[3]{12}$ und $\sqrt[3]{-a}$ so viel als $-\sqrt[3]{a}$. Woraus man sieht, daß das Zeichen (—) so hinter dem Cubic-Wurzel Zeichen ist, auch vor dasselbe geschrieben werden kann. Also werden wir hier auf keine unmögliche, oder eingebildete Zahlen geleitet, wie bey den Quadrat-Wurzeln der Negativ-Zahlen geschehen.

CAPITEL 16

VON DEN POTESTÄTEN ODER POTENZEN ÜBERHAUPT

168.

Wann eine Zahl mehrmalen mit sich selbsten multiplicirt wird, so wird das Product eine *Potestät*, oder auch *Potenz*, bisweilen auch eine *Dignität* genennet. Auf Teutsch könnte dieser Nahme durch eine Macht ausgedrückt werden. Da nun ein Quadrat entsteht, wann eine Zahl zwey mal mit sich selbsten multiplicirt wird, und ein Cubus wann die Zahl drey mal mit sich selbsten multiplicirt wird, so sind so wohl die Quadraten, als die Cubi, unter dem Nahmen der Potenzen oder Potestäten begriffen.

169.

Diese Potestäten werden nach der Anzahl, wie viel mal eine Zahl mit sich selbsten multiplicirt worden, von einander unterschieden. Also wann eine Zahl zwey mal mit sich selbsten multiplicirt wird, so heißt das Product ihre zweyte Potestät, welche also eben so viel ist als das Quadrat davon; wird eine Zahl dreymal mit sich selbsten multiplicirt, so heißt das Product ihre dritte Potestät, welche also einerley Bedeutung mit dem Cubus hat; wird ferner eine Zahl vier mal mit sich selbsten multiplicirt, so wird das Product ihre vierte Potestät genennt, welche gemeiniglich mit dem Nahmen des Biquadrats belegt wird: woraus man ferner versteht, was die fünfte, sechste, siebente Potestät einer Zahl bedeute; welche höhere Potestäten übrigens keine besondere Nahmen zu führen pflegen.

170.

Um dieses beßer zu erläutern, so bemercken wir, erstlich daß von der Zahl 1 alle Potestäten immer 1 bleiben; weil so viele mal man auch 1 mit sich selbsten multiplicirt, das Product immer 1 bleibt. Laßt uns dahero die Potestäten der Zahl 2, so wie auch die Potestäten der Zahl 3 nach der Ordnung herschreiben. Diese gehen folgendermaßen fort:

Potestäten.	der Zahl 2.	der Zahl 3.
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Aber insbesondere sind die Potestäten von der Zahl 10 merckwürdig, nehmlich

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000,

weil sich darauf unsere gantze Rechenkunst gründet. Uebrigens ist zu mercken, daß die kleinen darüber gesetzten Zahlen andeuten, die wie vielste Potestät eine jegliche sey.

171.

Wollen wir die Sache auf eine allgemeine Art betrachten, so würden sich die Potestäten der Zahl a folgender gestalt verhalten.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
a,	aa,	aaa,	$aaaa$,	$aaaaa$,	$aaaaaa$,	etc.

Bey dieser Art zu schreiben ereignet sich aber diese Unbequemlichkeit, daß wann sehr hohe Potestäten geschrieben werden sollten, man eben denselben Buchstaben gar viele mal hinschreiben müßte, und es dem Leser noch viel beschwerlicher fallen würde, die Menge dieser Buchstaben zu zählen, um zu wißen die wie vielste Potestät dadurch angezeigt werde. Also z. E. würde sich die hundertste Potestät auf diese Art schwerlich schreiben laßen, und noch viel weniger zu erkennen seyn.

172.

Dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, hat man eine weit bequemere Art solche Potestäten auszudrücken eingeführt, welche wegen ihres herrlichen Nutzens auf das sorgfältigste erklärt zu werden verdienet. Man pflegt nemlich über der Zahl wovon z. E. die hundertste Potestät soll angezeigt werden, etwas seitwärts zur rechten die Zahl 100 zu schreiben: Also a^{100} welches ausgesprochen wird, a elivirt oder erhaben zu Hundert, drückt die Hundertste Potestät von a aus. Die dabey oben geschriebene Zahl, als in unserm Fall 100, pflegt der *Exponent* genennt zu werden, welche Nahmen wohl zu bemercken sind.

173.

Nach dieser Art deutet also a^2, oder a elivirt zu 2, die zweyte Potestät von a an, und pflegt auch bisweilen anstatt aa geschrieben zu werden; weil beyde Arten gleich leicht zu schreiben, und zu verstehen sind. Hingegen wird gemeiniglich anstatt des Cubi oder der dritten Potestät aaa, nach dieser neuen Art a^3 geschrieben, weil dadurch mehr Platz erspart wird. Eben so drückt a^4 die vierte Potestät, a^5 die fünfte, und a^6 die sechste Potestät von a aus.

174.

Nach dieser Art werden alle Potestäten von der Zahl a folgendergestallt vorgestellt,

$$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ a^8,\ a^9,\ a^{10},\ a^{11},\ a^{12},\ \text{etc.}$$

woraus man sieht, daß nach dieser Art für das erste Glied a, gar füglich a^1 geschrieben werden könnte, um die Ordnung desto deutlicher in die Augen fallen zu machen. Dahero ist a^1 nichts anders als a weil die Unität anzeigt, daß der Buchstabe a nur einmal geschrieben werden soll. Eine solche Reihe von Potestäten pflegt auch eine Geometrische Progression genennt zu werden, weil immer ein jedes Glied um eben so viel mal größer ist, als das vorhergehende.

175.

Wie in dieser Reihe der Potestäten ein jedes Glied gefunden wird, wann man das vorhergehende mit a multiplicirt, wodurch der Exponent um eins größer wird; so wird auch aus einem jeglichen Gliede das vorhergehende gefunden, wann man jenes durch a dividirt, als wodurch der Exponent um eines vermindert wird. Hieraus sehen wir, daß das dem ersten Glied a^1 vorhergehende Glied $\frac{a}{a}$ seyn müße das ist 1: nach dem Exponenten wird aber eben dasselbe seyn a^0, als woraus diese merckwürdige Eigenschaft folgt, daß a^0 allezeit 1 seyn müße, die Zahl a mag auch so groß oder so klein seyn als sie immer will, ja so gar auch wenn a nichts ist, also daß 0^0 gewis 1 ausmacht. [1])

176.

Wir können diese Reihe von Potestäten noch weiter rückwärts fortsetzen, und dieses so gar auf eine doppelte Weise. Einmal, indem wir immer das Glied durch a theilen; hernach aber auch, indem wir den Exponent um eins vermindern oder eins davon subtrahiren. Und wir sind gewiß, daß nach beyderley Arten die Glieder einander vollkommen gleich sind. Wir wollen also die obige Reihe auf diese gedoppelte Art rückwerts vorstellen, welche auch rückwerts von der rechten zur lincken gelesen werden muß:

1) Nach heutiger Auffassung ist 0^0 ein Zeichen ohne bestimmte Bedeutung. H. W.

1te	$\frac{1}{aaaaaa}$	$\frac{1}{aaaaa}$	$\frac{1}{aaaa}$	$\frac{1}{aaa}$	$\frac{1}{aa}$	$\frac{1}{a}$	1	a
	$\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^1}$		
2te	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

177.

Hierdurch gelangen wir also zur Erkenntniß solcher Potestäten deren Exponenten negative Zahlen sind; und wir sind im Stande den Werth derselben genau anzuzeigen. Wir wollen daher dasjenige, was wir gefunden, folgender Gestalt vor Augen legen:

Erstlich a^0, ist so viel als 1.

a^{-1} „ „ „ „ $\frac{1}{a}$

a^{-2} „ „ „ „ $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$

a^{-3} „ „ „ „ $\frac{1}{a^3}$

a^{-4} „ „ „ „ $\frac{1}{a^4}$ und so fort.

178.

Hieraus ist auch klar, wie die Potestäten von einem Product als ab gefunden werden müßen. Dieselben sind nemlich

$$ab \text{ oder } a^1b^1,\ a^2b^2,\ a^3b^3,\ a^4b^4,\ a^5b^5,\ a^6b^6, \text{ etc.}$$

Eben so werden auch die Potestäten von Brüchen gefunden, als von dem Bruch $\frac{a}{b}$ sind die Potestäten folgende:

$$\frac{a^1}{b^1},\ \frac{a^2}{b^2},\ \frac{a^3}{b^3},\ \frac{a^4}{b^4},\ \frac{a^5}{b^5},\ \frac{a^6}{b^6},\ \frac{a^7}{b^7}, \text{ etc.}$$

179.

Endlich kommen auch noch hier die Potestäten von Negativ-Zahlen zu betrachten vor. Es sey demnach gegeben die Negativ-Zahl $-a$, so werden ihre Potestäten der Ordnung nach also auf einander folgen,

$$-a,\ +aa,\ -a^3,\ +a^4,\ -a^5,\ +a^6,\ -a^7, \text{ etc.}$$

Woraus erhellet, daß nur diejenige Potestäten, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, negativ werden; hingegen sind diejenige Potestäten, deren Exponenten grade sind, alle Positiv. Also haben die dritte, fünfte, siebente, neunte, Potestäten der negativen Zahlen alle das Zeichen —.

Die zweyte, vierte, sechste, achte, Potestäten hingegen alle das Zeichen +.

CAPITEL 17

VON DEN RECHNUNGS-ARTEN MIT DEN POTESTÄTEN

180.

In Ansehung der Addition und Subtraction ist hier nichts zu bemercken, indem verschiedene Potestäten nur mit dem Zeichen + und — verbunden werden.

Also ist $a^3 + a^2$ die Summa von der dritten und zweyten Potestät des a; und $a^5 - a^4$ ist der Rest, wann von der fünften Potestät die vierte abgezogen wird, und beydes kann nicht kürtzer ausgedrückt werden. Wann aber gleiche Potestäten vorkommen, so ist klar, daß für $a^3 + a^3$ geschrieben werden kann $2a^3$ etc.

181.

Bey der Multiplication solcher Potestäten aber kommt verschiedenes zu bemercken vor. Erstlich wann eine jede Potestät von a mit der Zahl a selbsten multiplicirt werden soll, so kommt die folgende Potestät heraus, deren Exponens um 1 größer ist. Also a^2 mit a multiplicirt giebt a^3, und a^3 mit a multiplicirt giebt a^4 etc. Eben so mit denjenigen deren Exponenten negativ sind, wann dieselben mit a multiplicirt werden sollen, darf man nur zu dem Exponens 1 addiren: Also a^{-1} mit a multiplicirt giebt a^0 das ist 1, welches daraus klar ist, weil a^{-1} so viel als $\frac{1}{a}$ ist welches mit a multiplicirt $\frac{a}{a}$ giebt, das ist 1. Eben so mit a^{-2}, wann solches mit a multiplicirt werden soll giebt a^{-1}, das ist $\frac{1}{a}$, und a^{-10} mit a multiplicirt, giebt a^{-9}, und so fort.

182.

Wann aber eine Potestät mit aa, oder mit der zweiten Potestät multiplicirt werden soll, so wird der Exponens um 2 größer; also a^2 mit a^2 multipli-