137.

Bey der Addition und Subtraction fällt nichts besonders zu bemercken vor, weil die Zahlen nur mit *plus* und *minus* verbunden werden. Als: $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ addirt, giebt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; und $\sqrt{3}$ von $\sqrt{5}$ abgezogen, giebt $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

138.

Endlich ist noch zu mercken, daß, zum Unterschied dieser sogenannten Irrational-Zahlen, die gewöhnlichen Zahlen, so wohl gantze als Brüche, *Rational-Zahlen* genennt zu werden pflegen.

Wann also von Rational-Zahlen die Rede ist, so werden darunter allezeit nur ganze Zahlen, oder auch Brüche verstanden.

CAPITEL 13

VON DEN AUS EBEN DIESER QUELLE ENTSPRINGENDEN OHNMÖGLICHEN ODER IMAGINÄREN ZAHLEN

139.

Wir haben schon oben gesehen, daß die Quadraten so wohl von den positiven als negativen Zahlen immer positiv sind, oder mit dem Zeichen plus heraus kommen; indem $-a$ mit $-a$ multiplicirt eben so wohl $+aa$ giebt, als wann man $+a$ mit $+a$ multiplicirt. Und dahero haben wir in dem vorigen Capitel alle Zahlen, woraus die Quadrat-Wurzeln gezogen werden sollen, als positiv angenommen.

140.

Wann es sich dahero zuträgt, daß aus einer Negativ-Zahl die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll, so muß man sich allerdings in einer großen Verlegenheit befinden, weil sich keine Zahl angeben läßt, deren Quadrat eine Negativ-Zahl wäre. Denn wann man z. E. die Quadrat-Wurzel von der Zahl -4 verlangt, so will man eine solche Zahl haben, welche mit sich selbst multiplicirt -4 gebe. Diese gesuchte Zahl ist also weder $+2$ noch -2, indem so wohl $+2$ als -2, mit sich selbsten multiplicirt allemal $+4$ giebt, und nicht -4.

141.

Hieraus erkennt man also, daß die Quadrat-Wurzel von einer Negativ-Zahl weder eine Positiv- noch Negativ-Zahl seyn könne, weil auch von allen Negativ-Zahlen die Quadrate positiv werden, oder das Zeichen $+$ bekommen; folglich muß die verlangte Wurzel von einer gantz besondern Art Zahlen seyn, indem dieselbe weder zu den Positiv- noch Negativ-Zahlen gerechnet werden kann.

142.

Da nun oben schon angemerckt worden, daß die Positiv-Zahlen alle größer sind, als nichts oder 0; die Negativ-Zahlen hingegen alle kleiner sind, als nichts oder 0; also, daß alles was größer ist als nichts, durch Positiv-Zahlen; alles aber was kleiner ist als nichts, durch Negativ-Zahlen ausgedrückt wird: so sehen wir, daß die Quadrat-Wurzeln aus Negativ-Zahlen weder größer sind als nichts, noch kleiner als nichts. Nichts sind sie aber doch auch nicht, weil 0 mit 0 multiplicirt 0 und also keine Negativ-Zahl giebt.

143.

Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner sind als 0, oder etwa 0 selbst; so ist klar, daß die Quadrat-Wurzeln von Negativ-Zahlen nicht einmahl unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden: folglich müßen wir sagen, daß dieselben ohnmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach ohnmöglich sind, und gemeiniglich *Imaginäre Zahlen*, oder *eingebildete Zahlen* genennt werden, weil sie blos allein in der Einbildung statt finden.

144.

Dahero bedeuten alle diese Ausdrücke $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, etc. solche ohnmögliche oder Imaginäre Zahlen, weil dadurch Quadrat-Wurzeln von Negativ-Zahlen angezeigt werden.

Von diesen behauptet man also mit allem Recht daß sie weder größer noch kleiner sind als nichts; und auch nicht einmahl nichts selbsten, als aus welchem Grund sie folglich für ohnmöglich gehalten werden müßen.

145.

Gleichwohl aber werden sie unserm Verstand dargestellt, und finden in unserer Einbildung statt; daher sie auch blos eingebildete Zahlen genennt werden. Ungeacht aber diese Zahlen als z. E. $\sqrt{-4}$, ihrer Natur nach ganz und gar ohnmöglich sind, so haben wir davon doch einen hinlänglichen Begriff, indem wir wißen, daß dadurch eine solche Zahl angedeutet werde, welche mit sich selbsten multiplicirt zum Produkt -4 hervorbringe; und dieser Begriff ist zureichend um diese Zahlen in der Rechnung gehörig zu behandeln.

146.

Dasjenige nun, was wir zu allererst von dergleichen ohnmöglichen Zahlen, als z. E. von $\sqrt{-3}$, wißen, besteht darin, daß das Quadrat davon, oder das Product welches herauskommet, wann $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt wird, -3 giebt, eben so ist $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-1}$ mult. -1. Und überhaupt wann man $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt oder das Quadrat von $\sqrt{-a}$ nimmt, so giebt es $-a$.

147.

Da $-a$ so viel ist, als $+a$ mit -1 multiplicirt, und die Quadrat-Wurzel aus einem Product gefunden wird, wann man die Quadrat-Wurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt, so ist Radix aus a mit -1 multiplicirt oder $\sqrt{-a}$ so viel, als $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Nun aber ist $\sqrt{a}$ eine mögliche Zahl, folglich läßt sich dieses ohnmögliche, welches darin vorkommt, allezeit auf $\sqrt{-1}$ bringen. Aus diesem Grunde ist also $\sqrt{-4}$ so viel als $\sqrt{4}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt: $\sqrt{4}$ aber ist 2, also ist $\sqrt{-4}$ so viel als $2\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-9}$ so viel als $\sqrt{9}.\ \sqrt{-1}$, das ist $3\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-16}$ so viel als $4\sqrt{-1}$.

148.

Da ferner $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{ab}$ giebt, so wird $\sqrt{-2}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt $\sqrt{6}$ geben. Eben so wird $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-4}$ multiplicirt $\sqrt{4}$, das ist 2 geben. Hieraus sieht man daß zwey ohnmögliche Zahlen mit einander multiplicirt eine mögliche, oder würckliche Zahl hervorbringen.

Wann aber $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{+5}$ multiplicirt wird, so bekommt man $\sqrt{-15}$. Oder eine mögliche Zahl mit einer unmöglichen multiplicirt, giebt allezeit etwas unmögliches.

149.

Eben so verhält sich die Sache auch mit der Division. Dann da $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt $\sqrt{\frac{a}{b}}$ giebt, so wird $\sqrt{-4}$ durch $\sqrt{-1}$ dividirt $\sqrt{+4}$ geben, und $\sqrt{+3}$ durch $\sqrt{-3}$ dividirt wird geben $\sqrt{-1}$. Ferner 1 durch $\sqrt{-1}$ dividirt, giebt $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$ das ist $\sqrt{-1}$ weil 1 so viel ist, als $\sqrt{+1}$.

150.

Wie aber die obige Anmerckung allezeit statt findet, daß die Quadrat-Wurzel aus einer jeglichen Zahl immer einen doppelten Werth hat, oder so wohl negativ als positiv genommen werden kann, indem z. E. $\sqrt{4}$, so wohl $+2$ als -2 ist, und überhaupt für die Quadrat-Wurzel aus a so wohl $+\sqrt{a}$ als $-\sqrt{a}$ geschrieben werden kann, so gilt dieses auch bey den unmöglichen Zahlen; und die Quadrat-Wurzel aus $-a$, ist so wohl $+\sqrt{-a}$ als $-\sqrt{-a}$, wobey man die Zeichen $+$ und $-$ welche vor dem $\sqrt{\ }$ Zeichen gesetzt werden, von dem Zeichen so hinter dem $\sqrt{\ }$ Zeichen steht, wohl unterscheiden muß.

151.

Endlich muß noch ein Zweifel gehoben werden, welcher darinn besteht, daß da dergleichen Zahlen ohnmöglich sind, dieselben auch gantz und gar keinen Nutzen zu haben scheinen und diese Lehre als eine bloße Grille angesehen werden könnte. Allein dieselbe ist in der That von der größten Wichtigkeit, indem öfters Fragen vorkommen, von welchen man so gleich nicht wißen kann, ob sie möglich sind oder nicht. Wann nun die Auflösung derselben auf solche ohnmögliche Zahlen führt, so ist es ein sicheres Zeichen, daß die Frage selbst ohnmöglich sey. Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so laßt uns diese Frage betrachten: Man soll die Zahl 12 in zwey solche Theile zerschneiden, deren Product 40 ausmache. Wann man nun diese Frage nach den Regeln auflößt, so findet man für die zwey gesuchten Theile $6+\sqrt{-4}$, und $6-\sqrt{-4}$ welche folglich unmöglich sind, und hieraus eben erkennt man, daß diese Frage ohnmöglich könne aufgelößt werden. Wolte man aber die Zahl 12 in zwey solche Theile zerschneiden, deren Product 35 wäre, so ist offenbar, daß diese Theile 7 und 5 seyn würden.