als $-a$, so wird ihr Quadrat seyn $+aa$, eben so als wann die Wurzel $+a$ wäre; folglich ist $+aa$ eben so wohl das Quadrat von $+a$ als von $-a$; und können dahero von einem jeden Quadrat zwey Quadrat-Wurzeln angegeben werden, deren eine Positiv, die andere Negativ ist. Also ist die Quadrat-Wurzel von 25 so wohl $+5$, als -5, weil $+5$ mit $+5$ multiplicirt, und auch -5 mit -5 multiplicirt $+25$ giebt.

CAPITEL 12

VON DEN QUADRAT-WURZELN UND DEN DAHER ENTSPRINGENDEN IRRATIONAL-ZAHLEN

123.

Aus dem vorhergehenden erhellet, daß die Quadrat-Wurzel aus einer vorgegebenen Zahl nichts anders ist, als eine solche Zahl, deren Quadrat der vorgegebenen Zahl gleich ist. Also die Quadrat-Wurzel von 4 ist 2, von 9 ist sie 3, von 16 ist sie 4 u. s. w. wobey zu mercken ist, daß diese Wurzeln so wohl mit dem Zeichen plus als minus gesetzt werden können. Also von der Zahl 25, ist die Quadrat-Wurzel so wohl $+5$, als -5, weil -5 mit -5 multiplicirt eben so wohl $+25$ ausmacht, als $+5$ mit $+5$ multiplicirt.

124.

Wann dahero die vorgegebene Zahl ein Quadrat ist und man die Quadrat-Zahlen so weit im Gedächtniß hat, so ist es leicht die Quadrat-Wurzel zu finden: als, wann die vorgegebene Zahl 196 wäre so weiß man, daß die Quadrat-Wurzel davon 14 ist. Mit den Brüchen ist es ebenfalls nicht schwerer, und ist aus dem obigen klar, daß von dem Bruch $\frac{25}{49}$ die Quadrat-Wurzel sey $\frac{5}{7}$, weil man nur so wohl von dem Zehler, als von dem Nenner die Quadrat-Wurzel nehmen darf. Ist die vorgegebene Zahl eine vermischte Zahl als $12\frac{1}{4}$ so bringe man dieselbe auf einen einzeln Bruch, nemlich $\frac{49}{4}$ wovon die Quadrat-Wurzel offenbar $\frac{7}{2}$ ist, oder $3\frac{1}{2}$, welches also die Quadrat-Wurzel von $12\frac{1}{4}$ ist.

125.

Wann aber die vorgegebene Zahl kein Quadrat ist, als z. E. 12, so ist auch nicht möglich die Quadrat-Wurzel davon, das ist eine solche Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt just 12 ausmache, zu finden oder anzugeben. Inzwischen aber wißen wir doch, daß die Quadrat-Wurzel von 12 größer ist als 3, weil $3 \cdot 3$ nur 9 macht, doch aber kleiner als 4, weil $4 \cdot 4$ schon 16 macht; wir wißen so gar auch, daß dieselbe kleiner seyn müße als $3\frac{1}{2}$, weil das Quadrat von $3\frac{1}{2}$ mehr ist als 12, dann $3\frac{1}{2}$ ist $\frac{7}{2}$ und dessen Quadrat $\frac{49}{4}$ oder $12\frac{1}{4}$. Wir können so gar diese Wurzel noch näher bestimmen durch $3\frac{7}{15}$ dann das Quadrat von $3\frac{7}{15}$ oder $\frac{52}{15}$ macht $\frac{2704}{225}$; folglich ist $3\frac{7}{15}$ noch um etwas zu groß, dann $\frac{2704}{225}$ ist um $\frac{4}{225}$ größer als 12.

126.

Weil nun $3\frac{1}{2}$ und auch $3\frac{7}{15}$ um etwas größer ist als die Quadrat-Wurzel von 12, so möchte man dencken, daß wann man anstatt des Bruchs $\frac{7}{15}$ einen etwas kleinern zu 3 addirte, das Quadrat davon genau 12 werden könnte.

Laßt uns also $3\frac{3}{7}$ nehmen, weil $\frac{3}{7}$ um etwas wenigs kleiner ist als $\frac{7}{15}$. Nun ist $3\frac{3}{7}$ so viel als $\frac{24}{7}$, wovon das Quadrat $\frac{576}{49}$, und also kleiner ist als 12. Dann 12 betragen $\frac{588}{49}$, ist also noch um $\frac{12}{49}$ zu klein. Hieraus sehen wir also, daß $3\frac{3}{7}$ zu klein, $3\frac{7}{15}$ aber zu groß ist. Man könnte also $3\frac{5}{11}$ annehmen, weil $\frac{5}{11}$ größer ist als $\frac{3}{7}$ und doch kleiner als $\frac{7}{15}$. Da nun $3\frac{5}{11}$ in einem Bruch gebracht $\frac{38}{11}$ sind, so ist das Quadrat davon $\frac{1444}{121}$. Aber 12 auf diesen Nenner gebracht giebt $\frac{1452}{121}$, woraus erhellet, daß $3\frac{5}{11}$ noch zu klein ist und das nur um $\frac{8}{121}$. Wollte man nun setzen die Wurzel wäre $3\frac{6}{13}$, weil $\frac{6}{13}$ etwas größer ist als $\frac{5}{11}$, so wäre das Quadrat davon $\frac{2025}{169}$; aber 12 zu diesen Nenner gebracht bringt $\frac{2028}{169}$. Also ist $3\frac{6}{13}$ noch zu klein, doch nur um $\frac{3}{169}$, da doch $3\frac{7}{15}$ zu groß ist.

127.

Es läßt sich aber leicht begreiffen, daß was wir auch immer für einen Bruch zu 3 hinzusetzen möchten, das Quadrat davon immer einen Bruch in sich faßen müße, und also niemahls genau 12 betragen könne. Also, ohngeacht wir wißen, daß die Quadrat-Wurzel von 12 größer ist als $3\frac{6}{13}$ doch aber kleiner als $3\frac{7}{15}$, so müßen wir doch bekennen, daß es nicht möglich sey zwischen diesen zwey Brüchen, einen solchen ausfündig zu machen, welcher zu 3 addirt, die Quadrat-Wurzel von 12 genau ausdrückte. Inzwischen kann man doch nicht sagen, daß die Quadrat-Wurzel von 12 an und für sich selbsten unbestimmt wäre, sondern es folgt aus dem angeführten nur so viel, daß dieselbe durch Brüche nicht könne ausgedrückt werden, ohngeachtet sie nothwendig eine bestimmte Größe hat.

128.

Hiedurch werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche sich keineswegs durch Brüche ausdrücken laßen und gleichwohl eine bestimmte Größe haben, wie wir von der Quadrat-Wurzel aus der Zahl 12 gesehen haben. Diese neue Art von Zahlen werden nun *Irrational-Zahlen* genennt, und solche entspringen, so oft man die Quadrat-Wurzel aus einer Zahl suchen soll, welche kein Quadrat ist. Also weil 2 kein Quadrat ist, so ist auch die Quadrat-Wurzel aus 2, oder diejenige Zahl, welche mit sich selbsten multiplicirt genau 2 hervorbringt, eine Irrational-Zahl. Bisweilen pflegen auch solche Zahlen *Surdische* genennt zu werden.

129.

Ohngeacht sich nun solche Irrational-Zahlen durch keinen Bruch vorstellen laßen, so haben wir doch einen deutlichen Begriff von der Größe derselben. Dann z. E. die Quadrat-Wurzel aus 12 mag auch immer noch so verborgen scheinen, so wißen wir doch daß dieselbe eine solche Zahl ist, welche mit sich selbst multiplicirt just 12 hervorbringt. Und diese Eigenschaft ist hinlänglich, uns einen deutlichen Begriff von dieser Zahl zu geben, insonderheit da wir immer näher zu dem Werth derselben gelangen könen.

130.

Weil wir nun einen hinlänglichen Begriff von dergleichen Irrational-Zahlen haben, so bedienet man sich eines gewißen Zeichens, um die Quadrat-Wurzel von solchen Zahlen, welche keine Quadrate sind, anzudeuten. Dieses Zeichen hat nun diese Figur, $\surd$ und wird mit dem Wort Quadrat-Wurzel ausgesprochen. Also $\sqrt{12}$ deutet diejenige Zahl an, welche mit sich selbsten multiplicirt 12 giebt, oder die Quadrat-Wurzel aus 12. Eben so bedeutet $\sqrt{2}$ die Quadrat-Wurzel aus 2; $\sqrt{3}$ die Quadrat-Wurzel aus 3; ferner $\sqrt{\frac{2}{3}}$ die Quadrat-Wurzel aus $\frac{2}{3}$, und überhaupt $\sqrt{a}$, deutet die Quadrat-Wurzel aus der Zahl a an. So offt man also aus einer Zahl, welche kein Quadrat ist, die Quadrat-Wurzel anzeigen soll, so bedient man sich dieses Zeichens $\sqrt{}$, welches vor dieselbe Zahl geschrieben wird.

131.

Der obgemeldete Begriff von diesen Irrational-Zahlen führt uns sogleich auf einen Weg die gewöhnlichen Rechnungen mit denselben anzustellen. Weil nemlich die Quadrat-Wurzel aus 2 mit sich selbsten multiplicirt 2 geben muß, so wißen wir, daß wann $\sqrt{2}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt wird, nothwendig 2 herauskomme; eben so $\sqrt{3}$ mit $\sqrt{3}$ multiplicirt giebt 3; und $\sqrt{5}$ mit $\sqrt{5}$ giebt 5; imgleichen $\sqrt{\frac{2}{3}}$ mit $\sqrt{\frac{2}{3}}$ giebt $\frac{2}{3}$; und überhaupt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt giebt a.

132.

Wann aber $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt werden soll, so ist das Product $\sqrt{ab}$, weil wir oben gezeigt haben, daß wann ein Quadrat Factores hat, die Wurzel davon auch aus den Wurzeln der Factores entstehen. Daher findet man die Quadrat-Wurzel aus dem Product ab, das ist $\sqrt{ab}$, wann man die Quadrat-Wurzel von a, das ist $\sqrt{a}$, mit der Quadrat-Wurzel von b, das ist $\sqrt{b}$, multiplicirt. Hieraus erhellet sogleich daß wann b dem a gleich wäre, alsdenn $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt $\sqrt{aa}$ gäbe. Nun aber ist $\sqrt{aa}$ offenbar a weil aa das Quadrat ist von a.

133.

Eben so, wann $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividiret werden soll, so bekömmt man $\sqrt{\frac{a}{b}}$, wobey es sich zutragen kann, daß im Quotus die Irrationalität verschwinde. Also wenn $\sqrt{18}$ durch $\sqrt{8}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\sqrt{\frac{18}{8}}$. Es ist aber $\frac{18}{8}$ so viel als $\frac{9}{4}$ und die Quadrat-Wurzel von $\frac{9}{4}$ ist $\frac{3}{2}$.

134.

Wann die Zahl, vor welche das Wurzel-Zeichen $\sqrt{}$ gesetzt wird, selbst ein Quadrat ist, so läßt sich die Wurzel davon auf die gewöhnliche Art ausdrucken. Also ist $\sqrt{4}$ so viel als 2; $\sqrt{9}$ ist 3; $\sqrt{36}$ ist 6; und $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ ist $\sqrt{\frac{49}{4}}$ das ist $\frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2}$. In diesen Fällen ist demnach die Irrationalität nur scheinbar, und fällt von selbsten weg.

135.

Es ist auch leicht solche Irrational-Zahlen mit gewöhnlichen Zahlen zu multipliciren. Also ist 2 mal $\sqrt{5}$, so viel als $2\sqrt{5}$; und $\sqrt{2}$ mit 3 multiplicirt giebt $3\sqrt{2}$; weil aber 3 so viel ist als $\sqrt{9}$, so giebt auch $\sqrt{9}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt folgende Form, nemlich $\sqrt{18}$. Also daß $\sqrt{18}$ eben so viel ist als $3\sqrt{2}$. Eben so ist $2\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{4a}$, und $3\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{9a}$. Und auf eine allgemeine Art ist $b\sqrt{a}$ so viel als die Quadrat-Wurzel aus bba oder $\sqrt{abb}$; woraus man sieht, daß wann die Zahl, die hinter dem Zeichen steht, ein Quadrat in sich enthält, die Wurzel davon vor das Zeichen gesezt werden kann; als $b\sqrt{a}$ anstatt $\sqrt{bba}$. Diesem nach werden folgende Reductionen klar seyn:

$\sqrt{8}$, oder $\sqrt{2\cdot 4}$, ist so viel als $2\sqrt{2}$.
$\sqrt{12}$, „ $\sqrt{3\cdot 4}$, „ „ „ „ $2\sqrt{3}$.
$\sqrt{18}$, „ $\sqrt{2\cdot 9}$, „ „ „ „ $3\sqrt{2}$.
$\sqrt{24}$, „ $\sqrt{6\cdot 4}$, „ „ „ „ $2\sqrt{6}$.
$\sqrt{32}$, „ $\sqrt{2\cdot 16}$, „ „ „ „ $4\sqrt{2}$.
$\sqrt{75}$, „ $\sqrt{3\cdot 25}$, „ „ „ „ $5\sqrt{3}$ und so fort.

136.

Mit der Division hat es eben die Bewantniß: $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt, giebt $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, das ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Auf eben diese Weise ist $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ so viel als $\sqrt{\frac{8}{2}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ ist $\sqrt{\frac{18}{2}}$, oder $\sqrt{9}$, oder 3. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ist $\sqrt{\frac{12}{3}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ ist $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$, oder $\sqrt{\frac{4}{2}}$, oder $\sqrt{2}$. $\frac{3}{\sqrt{3}}$ ist $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$, oder $\sqrt{\frac{9}{3}}$, oder $\sqrt{3}$.

$\frac{12}{\sqrt{6}}$ ist $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$, oder $\sqrt{\frac{144}{6}}$, oder $\sqrt{24}$, oder $\sqrt{6\cdot 4}$, das ist $2\sqrt{6}$.

137.

Bey der Addition und Subtraction fällt nichts besonders zu bemercken vor, weil die Zahlen nur mit *plus* und *minus* verbunden werden. Als: $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ addirt, giebt $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; und $\sqrt{3}$ von $\sqrt{5}$ abgezogen, giebt $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

138.

Endlich ist noch zu mercken, daß, zum Unterschied dieser sogenannten Irrational-Zahlen, die gewöhnlichen Zahlen, so wohl gantze als Brüche, *Rational-Zahlen* genennt zu werden pflegen.

Wann also von Rational-Zahlen die Rede ist, so werden darunter allezeit nur ganze Zahlen, oder auch Brüche verstanden.

CAPITEL 13

VON DEN AUS EBEN DIESER QUELLE ENTSPRINGENDEN OHNMÖGLICHEN ODER IMAGINÄREN ZAHLEN

139.

Wir haben schon oben gesehen, daß die Quadraten so wohl von den positiven als negativen Zahlen immer positiv sind, oder mit dem Zeichen plus heraus kommen; indem $-a$ mit $-a$ multiplicirt eben so wohl $+aa$ giebt, als wann man $+a$ mit $+a$ multiplicirt. Und dahero haben wir in dem vorigen Capitel alle Zahlen, woraus die Quadrat-Wurzeln gezogen werden sollen, als positiv angenommen.

140.

Wann es sich dahero zuträgt, daß aus einer Negativ-Zahl die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll, so muß man sich allerdings in einer großen Verlegenheit befinden, weil sich keine Zahl angeben läßt, deren Quadrat eine Negativ-Zahl wäre. Denn wann man z. E. die Quadrat-Wurzel von der Zahl -4 verlangt, so will man eine solche Zahl haben, welche mit sich selbst multiplicirt -4 gebe. Diese gesuchte Zahl ist also weder $+2$ noch -2, indem so wohl $+2$ als -2, mit sich selbsten multiplicirt allemal $+4$ giebt, und nicht -4.